

جریان سیال تراکم ناپذیر

(هیدروآیرودینامیک کاربردی)

تألیف:

دکتر منوچهر راد

استاد دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شریف و دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب

محسن قدیانی

عضو هیئت علمی گروه مکانیک دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهرری

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقدیم به مهندسان جویای دانش

منوچهر راد

بوسه بر دستان مادر و پدر

مظاهر عطوفت و صلابت

محسن قدیانی

مقدمه مولفان

با وجود اینکه کتابهای بسیاری با عناوین مکانیک سیالات، دینامیک سیالات، هیدرودینامیک، هیدرولیک، آئرو دینامیک و... به زبانهای انگلیسی و فارسی تألیف شده اند ولی اغلب این کتب یا به صورت کاملاً تئوری بوده، یا فقط زمینه های خاص علوم کاربردی را شامل می گردند و یا اینکه مطالب آن فقط به صورت مطالعات و روابط تجربی بیان شده اند.

بنابراین با توجه به سوابق تدریس در زمینه های یاد شده، به نظر می رسید کتابی جامع و نسبتاً ساده و قابل فهم که اصول علم سیالات و کاربردهای آن را بیان کند و دارای حجمی مناسب جهت تدریس در سطوح متوسط و متناسب با اکثر زمینه های مهندسی باشد وجود ندارد. لذا مولفان تصمیم گرفتند که بر اساس جزوه های درسی اینجانب دکتر منوچهر راد که حاصل تجربیات سی ساله تدریس و دست نوشته های این دوران بوده است، تألیف این کتاب را آغاز کنند. نتیجه این کوششها کتابی است که پیش رو دارید و امید است که این اثر مفید فایده کلیه خوانندگان قرار گیرد. این کتاب می تواند برای تدریس و آموزش دروس مختلفی با عناوین دینامیک سیالات، هیدرودینامیک، آئرو دینامیک و سایر موارد مشابه مورد استفاده اساتید و دانشجویان کلیه رشته های علوم و مهندسی در مقاطع تحصیلی دکتری، کارشناسی ارشد و سال آخر دوره کارشناسی قرار گیرد. در تهیه و تکمیل این کتاب تعداد زیادی از دانشجویان مهندسی مکانیک، کمک نموده اند که لازم می دانیم از همه این عزیزان تشکر نماییم. همچنین لازم است از مدیریت محترم پژوهشگاه مواد و انرژی وزارت علوم که امکانات و تسهیلات مادی و معنوی جهت چاپ و انتشار این کتاب را در اختیار قرار دادند سپاسگزاری گردد.

بدون شک کتاب حاضر عاری از خطا نمی باشد و چون هدف نهاییمان وسعت اندیشه و بالابردن سطح معلومات و تجربیات دانشجویان است از اعضای محترم هیئت علمی و دانشجویان تقاضا داریم در صورت مشاهده خطا و یا داشتن پیشنهادی جهت بهبود این اثر، از طریق آدرس پست الکترونیکی زیر تذکر دهند تا در چاپهای بعدی اصلاح گردد که موجب تقدیر و سپاس خواهد بود.

منوچهر راد

محسن قدیانی

m.qphd@yahoo.com

فهرست مطالب

پیشگفتار.....	۸
فصل اول.....	۱۱
اصول اولیه دینامیک سیالات و روش تحلیل جریان.....	۱۱
۱-۱- تعریف سیال و خواص سیال.....	۱۱
۱-۲- سیال ایده آل و سیال حقیقی.....	۱۲
۱-۳- مایع، سیال غیر قابل تراکم و سیال ایده آل.....	۱۳
۱-۴- معرفی روش تحلیل جریان.....	۱۴
۱-۵- تحلیل دیفرانسیلی جریان سیال.....	۱۶
۱-۶- بحث در برخی شرایط مسئله.....	۱۷
۱-۷- رابطه قانون دوم نیوتن در امتداد عمود بر خط جریان.....	۱۹
۱-۸- آنالیز دیفرانسیلی المان سیال.....	۲۰
۱-۸-۱- سرعت و شتاب میدان جریان.....	۲۱
۱-۸-۲- حرکت خطی و تغییر طول المان (تغییر حجم).....	۲۲
۱-۸-۳- چرخش (دوران).....	۲۳
۱-۸-۴- تغییر شکل زاویه ای (کرنش برشی) و نرخ تغییر شکل زاویه ای (نرخ کرنش برشی).....	۲۷
تمرین های فصل اول.....	۲۹
فصل دوم.....	۳۱
معادلات بقاء برای حجم کنترل.....	۳۱
۱-۲- حالت کلی.....	۳۱
۲-۲- بقاء جرم.....	۳۲
۱-۲-۲- رابطه پیوستگی به صورت دیفرانسیل.....	۳۲
۲-۲-۲- تابع جریان.....	۳۴
۳-۲- قانون بقای اندازه حرکت خطی (معادله کوشی).....	۳۸
۱-۳-۲- جریان غیر لزج، جریان غیر چرخشی.....	۳۹
۲-۳-۲- معادلات اوילر.....	۴۰
۳-۳-۲- رابطه برنولی در میدان جریان غیر چرخشی.....	۴۱
۴-۲- مفهوم فیزیکی جریان غیر چرخشی.....	۴۲
۵-۲- تابع پتانسیل سرعت.....	۴۴
تمرین های فصل دوم.....	۴۷
فصل سوم.....	۵۰
جریان سیال ایده آل.....	۵۰

۵۰	۱-۳- مقدمه.....
۵۱	۲-۳- معادله اولر در سیستم مختصات خط جریانی.....
۵۲	۳-۳- جریان دو بعدی غیر چرخشی.....
۵۲	۱-۳-۳- روش ترسیمی شبکه جریان.....
۵۶	۲-۳-۳- شبکه جریان برای نفوذ سیال در محیط متخلخل.....
۵۷	۱-۲-۳-۳- جریان در محیط محدود.....
۵۹	تمرین های فصل سوم.....
۶۱	فصل چهارم.....
۶۱	الگوهای ساده جریان در جریان سیال دو بعدی غیر چرخشی.....
۶۱	۱-۴- جریان یکنواخت.....
۶۲	۲-۴- چشمه و چاه دو بعدی.....
۶۵	۳-۴- ورتکس آزاد یا ورتکس غیر چرخشی.....
۶۶	۱-۳-۴- گردآب و گردباد طبیعی.....
۶۷	۲-۳-۴- تغییرات سواحل و کف رودخانه در خم.....
۶۸	۴-۴- مفهوم ریاضی سیرکولاسیون.....
۷۰	۵-۴- ورتیسیته.....
۷۱	۶-۴- دوبلت (دوقلو).....
۷۱	۱-۶-۴- ترکیب چشمه و چاه.....
۷۲	۲-۶-۴- تعریف دوبلت (دوقلو).....
۷۴	تمرین های فصل چهارم.....
۷۶	فصل پنجم.....
۷۶	ترکیب جریان های ساده.....
۷۶	۱-۵- ترکیب ترسیمی جریان یا جمع گرافیک الگوهای جریان.....
۷۷	۲-۵- ترکیب چشمه و جریان یکنواخت (جریان حول نیم بدنه).....
۸۰	۳-۵- بیضی رانکین.....
۸۲	۴-۵- جریان حول استوانه با مقطع دایره.....
۸۵	۵-۵- جریان حقیقی اطراف استوانه.....
۸۷	۶-۵- الگوی جریان استوانه متحرک در سیال ساکن.....
۸۸	۷-۵- جریان اطراف استوانه با سیرکولاسیون.....
۹۳	تمرین های فصل پنجم.....
۱۰۰	فصل ششم.....
۱۰۰	مقدمه ای بر جریان سیال حقیقی و معادلات ناویر استوکس.....
۱۰۰	۱-۶- معادله حرکت و بررسی نیروهای وارد بر المان سیال.....

۱۰۱	۲-۶- انواع نیروهای وارد بر المان سیال
۱۰۵	۳-۶- تنش های وارد بر یک المان سیال
۱۰۶	۴-۶- معادله حرکت
۱۰۸	۵-۶- معادلات حرکت در جریان سیال نیوتنی حقیقی تراکم ناپذیر
۱۱۱	۶-۶- معادلات ناویر استوکس
۱۱۱	۱-۶-۶- رابطه بین تنش و نرخ کرنش
۱۱۲	۲-۶-۶- بدست آمدن معادلات ناویر استوکس از معادلات حرکت
۱۱۶	تمرین های فصل ششم
۱۱۹	فصل هفتم
۱۱۹	توابع مختلط تحلیلی و جریان پتانسیل دو بعدی در صفحه
۱۱۹	۱-۷- مقدمه
۱۲۰	۲-۷- خلاصه ای درباره توابع مختلط و کاربرد آن در جریان سیال
۱۲۲	۳-۷- سرعت مختلط
۱۲۴	۴-۷- تبدیل معکوس
۱۲۵	۵-۷- انتقال چند مرحله (تبدیل چند مرحله)
۱۲۶	۶-۷- روابط انتقال ساده
۱۲۶	۱-۶-۷- جریان موازی: $w = Az$
۱۲۸	۲-۶-۷- چشمه در $z = a$
۱۲۹	۳-۶-۷- ورتکس در $z = a$
۱۲۹	۴-۶-۷- ورتکس مارپیچی در $z = a$
۱۳۰	۵-۶-۷- دوبلت در مبدا مختصات: $w = \frac{\lambda}{z}$ و در $z = a$
۱۳۱	۶-۶-۷- ترکیب چشمه و چاه
۱۳۱	۷-۶-۷- جریان به داخل یک کانال
۱۳۲	۸-۶-۷- جریان در شکاف
۱۳۳	۹-۶-۷- جریان در یک زاویه $(\frac{\pi}{n})$
۱۳۴	۱۰-۶-۷- جریان حول استوانه بدون سیرکولاسیون
۱۳۵	۱۱-۶-۷- جریان حول استوانه با سیرکولاسیون
۱۳۶	۷-۷- روش تصویر آئینه ای
۱۴۰	تمرین های فصل هفتم
۱۴۴	فصل هشتم
۱۴۴	انتقال دایره
۱۴۴	۱-۸- ایده کلی

- ۸-۲- تعریف تصویر آینه ای یک نقطه ۱۴۵
- ۸-۳- تعریف نقطه معکوس و انتقال دایره ۱۴۵
- ۸-۴- رسم تابع تبدیل $Z = z_1 + a^2 / z_1$ به صورت گرافیکی ۱۴۶
- ۸-۵- جریان موازی با یک صفحه تخت نازک ۱۴۷
- ۸-۶- جریان عمود بر صفحه تخت ۱۴۷
- ۸-۷- جریان حول یک بیضی ۱۵۰
- ۸-۸- جریان حول جسم خط جریانی متقارن دو بعدی ۱۵۲
- ۸-۹- جریان حول کمانی از دایره ۱۵۳
- ۸-۱۰- جریان حول یک ایرفویل یا هیدروفویل نا متقارن ۱۵۵
- تمرین های فصل هشتم ۱۵۷
- فصل نهم ۱۶۰
- ایروفویل و هیدروفویل ۱۶۰
- ۹-۱- اصطلاحات در ایروفویل و هیدروفویل ۱۶۰
- ۹-۲- پروفیل های ایروفویل و هیدروفویل نازک ۱۶۳
- ۹-۳- شرط کاتا ۱۶۶
- ۹-۴- جریان پتانسیل و حقیقی اطراف یک ایروفویل یا هیدروفویل ۱۶۷
- ۹-۴-۱- جریان پتانسیل اطراف پروفیل یاکوفسکی با زاویه حمله ۱۶۸
- ۹-۴-۲- جریان حقیقی اطراف ایرفویل و هیدروفویل با زاویه حمله ۱۷۱
- ۹-۴-۳- تحلیل نیروها در ایرفویل و هیدروفویل ۱۷۴
- ۹-۵- اثرات محدود بودن پهنای ایرفویل یا هیدروفویل ۱۷۹
- ۹-۵-۱- اثر ضریب ظاهری در ایرفویل و هیدروفویل با پهنای محدود ۱۸۰
- ۹-۵-۲- پسای القائی و کاهش نیروی برآ در ایرفویل و هیدروفویل با پهنای محدود ۱۸۲
- ۹-۵-۳- جریان ردیف بی نهایت ورتکس ۱۸۳
- ۹-۵-۴- تشبیه ورقه ورتکس به ایرفویل یا هیدروفویل ۱۸۴
- ۹-۶- اثرات لزجت (ویسکوزیته) ۱۹۱
- ۹-۶-۱- اثر لزجت بر ضریب پسا ۱۹۱
- ۹-۶-۲- اثر لزجت بر ضریب برآ ۱۹۲
- ۹-۷- اثر کاویتاسیون ۱۹۴
- ۹-۷-۱- تعریف کاویتاسیون ۱۹۴
- ۹-۷-۲- پدیده کاویتاسیون در هیدروفویل ها ۱۹۵
- ۹-۸- اثر زبری ۱۹۷
- ۹-۹- اثر دنباله ۱۹۹
- ۹-۱۰- محورهای مهم تحقیقاتی ۲۰۰

۲۰۰	۹-۱۰-۱- اثر لوله دار کردن نوک هیدروفویل.....
۲۰۱	۹-۱۰-۲- مطالعه پدیده کاویتاسیون در هیدروفول دو بعدی.....
۲۰۲	۹-۱۰-۳- پدیده کاویتاسیون در هیدروفویل با لبه فرار مستقیم.....
۲۰۳	تمرین های فصل نهم.....
۲۰۸	فصل دهم.....
۲۰۸	جریان سه بعدی غیر چرخشی.....
۲۰۸	۱۰-۱-۱- جریانهای سه بعدی متقارن محوری.....
۲۰۹	۱۰-۱-۱-۱- تابع پتانسیل جریان های ساده متقارن محوری.....
۲۱۱	۱۰-۲-۱- به دست آوردن توابع جریان ساده.....
۲۱۱	۱۰-۲-۱-۱- جریان یکنواخت سه بعدی.....
۲۱۳	۱۰-۲-۲- چشمه و چاه نقطه ای سه بعدی.....
۲۱۴	۱۰-۳-۲-۱- دوقطبی (دوبلت) سه بعدی (نقطه ای).....
۲۱۵	۱۰-۳-۱- توأم کردن جریان های متقارن محوری.....
۲۱۵	۱۰-۳-۱-۱- ترکیب جریان یکنواخت و چشمه نقطه ای (سه بعدی).....
۲۱۷	۱۰-۳-۲- ترکیب جریان یکنواخت و جریان دوبلت.....
۲۱۷	۱۰-۳-۲-۱- جریان حول کره وقتی ناظر با کره حرکت دارد.....
۲۲۰	۱۰-۳-۲-۲- جریان اطراف کره متحرک نسبت به ناظر ثابت.....
۲۲۲	۱۰-۳-۳- ترکیب جریان یکنواخت و چشمه و چاه.....
۲۲۴	۱۰-۳-۴- ترکیب بینهایت چشمه (چاه) نقطه ای - خط چشمه (چاه) سه بعدی.....
۲۲۵	۱۰-۳-۵- ترکیب چشمه نقطه ای، خط چاه سه بعدی و جریان موازی.....
۲۲۸	تمرین های فصل دهم.....
۲۳۲	تمرین های تکمیلی.....
۲۴۱	فهرست منابع و مراجع.....

پیشگفتار

مکانیک سیالات به عنوان یکی از قدیمی ترین شاخه های علم فیزیک، اساس درک بسیاری از علوم کاربردی و مهندسی بوده و در ارتباط با حرکت جریان و تعادل سیالات تحقیق و بررسی می کند این علم شامل پایه موضوعی «هیدرودینامیک و آئرودینامیک» (جریان سیال تراکم پذیر) می باشد. به علاوه بسیاری از علوم به ویژه بیولوژی، مهندسی پزشکی، فیزیک سماوی، فیزیک پلاسما، اقیانوس شناسی و شیمی- فیزیک را شامل می شود. هیدرودینامیک مربوط به جریان آب می شود و بیشتر، جنبه های تئوری این جریان را بررسی می کند. مشابه این بررسی برای جریان هوا در سرعت های پایین، در علمی تحت عنوان آئرودینامیک مورد مطالعه قرار می گیرد.

از قرن نوزدهم که هیدرولیک به صورت یک علم در مهندسی عمران و آرشیستکت کشتی عنوان شد، دامنه مکانیک سیالات به طور مداوم در مهندسی گسترش یافته است. توسعه مهندسی آیرودینامیک (هوا فضا)، مکانیک و بیوشیمی در دهه های گذشته از یک طرف و جستجوهای علمی در فضا در نیم قرن گذشته از طرف دیگر، پویایی بسیار زیادی در مکانیک سیالات به وجود آورده است، به طوری که در حال حاضر به عنوان یکی از عناوین بسیار مهم و پایه های اصلی علوم می باشد.

تحقیقات جدید بخش دینامیک سیالات، به مسائلی چون پرواز در سرعت های بسیار بالا (سرعت های ابرصوتی)، هیدرودینامیک مغناطیسی، پیش بینی چند روزه و هفته ای هوا و جریان خون در قلب، رگها و مویرگ ها و غیره گسترش یافته است. همچنین در بسیاری از موارد لازم است که این علم، توأم با دانشی بر علوم دیگر مانند ترمو دینامیک، انتقال حرارت، بیولوژی و پزشکی باشد. علاوه بر علوم ذکر شده، مکانیک سیالات با بسیاری از تجربیات روزانه ما سرو کار دارد، نفسی که فرو می بریم و باز دم آن، پرواز پرندگان و حشرات در هوا، حرکت ماهی ها و موجودات آبی در دریا همه از قوانین مکانیک سیالات تبعیت می کنند. فرم بدن قهرمان اسکی هنگام پرش، پرتاب دیسک و یا زدن ضربه بر توپ توسط ورزشکاران با قوانین مکانیک سیالات قابل تجزیه و تحلیل بوده و می توان از آن برای مهارت بیشتر استفاده کرد.

در مهندسی بررسی تمام ماشین آلات، دستگاه ها و ساختمان هایی که در رابطه با سیال مخصوصاً آب و هوا عمل می کنند مثل: پمپ، توربین، هواپیما، موشک، کشتی، بندر، کانال، سد و خطوط انتقال مایع و گاز در لوله و تجزیه و تحلیل جریان در موتور و مبدل های حرارتی و طرح وسایل حمل و نقل و مسافرت هوایی و دریایی حتی حمل و نقل زمینی بستگی به تئوری های مکانیک

سیالات دارد. شاید روزی فرار رسد که حتی بتوان به طور دقیق اتفاقاتی مانند سیل، طوفان و گردباد و وضع دراز مدت آب و هوا را به کمک علم مکانیک سیالات پیش بینی و یا حتی تنظیم کرد. مطالعه همه جانبه سیالات را می توان به سه حالت استاتیک، سینماتیک و دینامیک سیالات تقسیم کرد. در حالت استاتیک، المان های سیال نسبت به یکدیگر ساکن می باشند، توزیع فشار استاتیکی را در این حالت می توان از طریق تحلیل سیال ساکن به دست آورد. در سینماتیک مطالعه سرعت و شتاب در انتقال، چرخش و نرخ تغییر شکل ذرات سیال بدون در نظر گرفتن نیروها صورت می گیرد و این مطالعه تصویری کلی از حرکت ذرات سیال می دهد. در حالت سوم، به دلیل وجود نیروهای داخلی بین ذرات سیال که به نوبه خود در سرعت و شتاب اثر می گذارد، لازم است که حرکت ذرات سیال به وسیله آنالیز دینامیکی تجزیه و تحلیل شود، تا اثرات سیال و محیط پیرامون آن در حرکت به دست آید. آنالیز دینامیکی شامل بررسی نیروهایی است که ذرات سیال در طول حرکت، بر یکدیگر و بر جدار جامد همجوار وارد می کنند.

طرح و بررسی مهندسی هیدرولیک و آیرودینامیک بستگی به پیش بینی شکل حرکت جریان، توزیع سرعت و نیروهایی که جریان ایجاد می کند دارد. انتخاب روش مناسب برای این پیش بینی، بستگی به طبیعت هر مسئله خاص و دقت لازم آن دارد. گاهی این امر مسئله ای ساده است مثلاً محاسبه دقیق نیروی فشار وارد بر یک جسم غوطه ور در سیال ساکن و نیز برخی از حالات جریان سیال لزج (جریان در رینولدز کم) نیز با دقت خوبی می تواند با استفاده از ساده کردن معادلات ناویر-استوکس^۱ حل گردد، ولی در تعدادی از مسائل به دلیل اثرات پیچیده لزجت^۲ محاسبه دقیق نیرو و سرعت امکان پذیر نیست و در این مواقع با استفاده از بعضی فرضیات مسئله باید به شکلی ساده تر و قابل حل تبدیل شود. ساده ترین حل تقریبی، روش تجزیه و تحلیل با فرض یک بعدی بودن جریان است که در بسیاری از مسائل به دست آوردن نیروی کل به جای توزیع فشار و یا سرعت متوسط به جای توزیع سرعت کاملاً مناسب است. در تحلیل جریان یک بعدی فرض بر این است که سرعت و فشار فقط در امتداد کلی جریان تغییر می کنند و سرعت متوسط در صفحه عمود بر امتداد جریان برای محاسبات به کار برده می شود و در این صفحه تغییرات سرعت در اثر لزجت و شکل جدار را در نظر نمی گیرند. با فرض یک بعدی بودن جریان نمی توان توزیع سرعت و فشار را مشخص نمود. با روش تحلیلی (ریاضی) در بعضی حالات با تجزیه و تحلیل دو یا سه بعدی جریان می توان با روش تحلیلی یا عددی و با دقت کافی جواب را پیدا کرد. وقتی این روش ها نتیجه ندهند، چاره ای جز استفاده از فرمول های تجربی و یا آزمایش وجود ندارد.

¹ Navier-Stokes

² Viscosity

کتاب حاضر مشتمل بر ده فصل است، در فصول ابتدایی به مطالعه اصول اولیه دینامیک سیالات و روش تحلیل جریان و معادلات مربوط به حجم کنترل پرداخته می شود. در فصول بعدی، تئوری جریان سیال ایده آل و الگوهای این جریان مطالعه می گردند. در ادامه، مشخصات سیال حقیقی را که تا حدودی آن را از سیال ایده آل جدا می سازد مطالعه می نماییم. با این حال در بخش عمده این کتاب به بررسی الگوهای جریان سیال ایده آل و متدهای پیش بینی این الگوها می پردازیم. این مطالب باید با در نظر داشتن طبیعت سیال حقیقی مطالعه شود، تا حدود کاربرد تئوری سیال ایده آل در طرح های عملی مشخص گردد. لذا، اثرات لزجت، لایه مرزی و جدایی، همچنین جریانهای غیر چرخشی سه بعدی را بطور اجمال در فصول انتهایی مطالعه خواهیم کرد. در پایان هر فصل، تعدادی تمرین ارائه شده است که جهت ارزیابی دانش آموختگان از خود پس از مطالعه هر یک از فصول این کتاب در نظر گرفته شده اند تا دانشجویان اهتمام بیشتری در یادگیری اصول و مفاهیم اولیه کسب نمایند و همچنین قادر شوند روش به کار بستن اصول اولیه در طراحی و ترکیب مسائل مختلف را تجربه کنند. این تمرین ها بستری را فراهم می سازند تا دانشجویان اعتماد به نفس لازم را برای به کار بستن اصول اولیه در حل مسائل واقعی کسب نمایند و از این کاربردها مبنایی برای تصمیم گیریهای طراحی پایه ریزی کنند که حل این تمرین ها به شناخت عمیق تر اصول اولیه کمک خواهد کرد.

فصل اول

اصول اولیه دینامیک سیالات و روش تحلیل جریان

۱-۱- تعریف سیال و خواص سیال

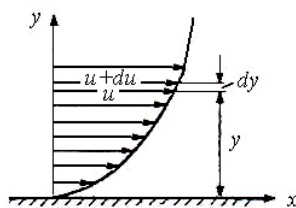
سیال ماده ای است که جاری می شود. تمام سیالات تحت تاثیر نیروی ناشی از تنش برشی، هر قدر هم که کوچک باشند تغییر شکل مداوم می دهند (تا زمانی که تنش برشی اعمال می گردد). با افزایش نرخ تغییر شکل، سیال مقاومت بیشتری نشان می دهد که این مقاومت وقتی که حرکت (تغییر شکل) وجود نداشته باشد، از بین می رود. این مقاومت در اثر لزجت^۱ سیال است. سیال نیوتنی، سیالی است که در آن تنش برشی با نرخ تغییر شکل، رابطه خطی دارد و در جریان موازی روی سطح مطابق شکل (۱-۱)، تنش برشی توسط گرادیان سرعت در جهت عمود بر جریان طبق رابطه زیر مشخص می شود:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1-1)$$

که τ تنش برشی در جهت x در صفحه عمود بر محور y و u سرعت در جهت x است که فقط با y تغییر می کند. μ در رابطه (۱-۱) مقدار ثابت رابطه است که آن را لزجت دینامیکی یا ضریب

¹ Viscosity

لزجت^۱ می نامند. سیالات معمولی مثل هوا، آب و اغلب مواد نفتی سبک، سیال نیوتنی بوده و از رابطه (۱-۱) تبعیت می کنند سیالات غیر نیوتنی معمولاً در کارهای مهندسی وارد نمی شوند و در اینجا راجع به آنها بحث نخواهیم کرد.



شکل ۱-۱: توزیع سرعت روی سطح

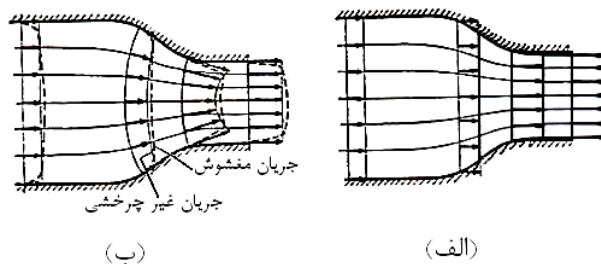
در تعدادی از مسائل به دلیل اثرات پیچیده لزجت، محاسبه دقیق نیرو و سرعت امکان پذیر نیست و در این مواقع با استفاده از بعضی فرضیات مسئله باید به شکلی ساده تر و قابل حل تبدیل شود. ساده ترین حل تقریبی جریان، روش تجزیه و تحلیل با فرض یک بعدی بودن جریان است که در بسیاری از مسائل به دست آوردن نیروی کل به جای توزیع فشار و یا سرعت متوسط به جای توزیع سرعت کاملاً مناسب است. در تحلیل جریان یک بعدی فرض بر این است که سرعت و فشار فقط در امتداد کلی جریان تغییر می کنند و سرعت متوسط در صفحه عمود بر امتداد جریان برای محاسبات به کار برده می شود و در این صفحه تغییرات سرعت در اثر لزجت و شکل جدار را در نظر نمی گیرند. ولی با فرض یک بعدی بودن جریان نمی توان توزیع سرعت و فشار را مشخص نمود.

۱-۲- سیال ایده آل و سیال حقیقی

روش های تحلیلی بر پایه هیدرو دینامیک کلاسیک بنا شده که در آن سیال غیر قابل تراکم و در خیلی موارد ایده آل فرض می شود. این سیال فرضی (ایده آل)، بنابر تعریف، سیالی است که غیر قابل تراکم بوده و لزجت آن صفر می باشد. بنابراین تنش برشی را تحمل نکرده و المان هایی از آن که با جدار جامد تماس دارند در روی جدار آزادانه می لغزند (بدون هیچ مقاومتی در امتداد جدار، سر می خورند) و نیروی سیال بر هر المانی از سطح جامد عمود بر آن سطح وارد می شود. در حرکت سیال حقیقی نیروی برشی همیشه موجود است و سیال در تماس با جدار جامد سر نمی خورد، سیال همجوار جدار جامد بر آن می چسبد و در امتداد مماس با سطح جامد، سیال حقیقی حرکتی ندارد.

¹ Coefficient of viscosity

این اختلافات بین سیال ایده آل و سیال حقیقی باعث تفاوت نتایج تئوری و تجربی می گردد. به طور مثال در حرکت یک جسم در سیال بی نهایت، طبق تئوری سیال ایده آل نیروهای مقاومتی (پسا)^۱ به جسم وارد نمی شود، در صورتی که در سیال حقیقی با وجود لزجت که باعث تنش برشی می شود همیشه نیروی پسا موجود خواهد بود. با این همه، مسائل عملی فراوانی موجود است که می توان آنها را با دقت کافی با روش هیدرودینامیک کلاسیک حل کرد (به خصوص با تئوری جریان پتانسیل). برخی از این مسائل عبارتند از پیدا کردن توزیع سرعت و فشار در قسمت جلوی اجسام خط جریانی^۲ و توزیع سرعت و فشار جریان در کانال های کوتاه همگرا، پیدا کردن شکل و حرکت امواج روی سطح مایع، شکل فوران آزاد و جریان مایع از روی سر ریز و حتی جریان کاملاً لزج نفوذ مایع در محیط متخلخل (مثلاً جریان آب های زیرزمینی) و محاسبه نیروی بالابر (برآ)^۳ در بال هواپیما. در شکل (۱-۲) نمونه ای از توزیع سرعت در یک کانال کوتاه همگرا در جریان یک بعدی و جریان غیر چرخشی و جریان حقیقی مغشوش مقایسه شده است. همانطور که اشاره شد در تحلیل جریان یک بعدی، سرعت و فشار فقط در امتداد کلی جریان تغییر می کنند و سرعت متوسط در صفحه عمود بر امتداد جریان برای محاسبات به کار برده می شود. در این صفحه تغییرات سرعت در اثر لزجت و شکل جدار در نظر گرفته نمی شود.



شکل ۱-۲: توزیع سرعت جریان در یک کانال همگرای دو بعدی

(الف) جریان با تعریف یک بعدی، (ب) جریان غیر چرخشی و خط چین، جریان مغشوش^۴

۱-۳- مایع، سیال غیر قابل تراکم و سیال ایده آل

مایع سیالی است که در یک درجه حرارت ثابت حجم مشخصی را در بر می گیرد و با تغییر فشار این حجم تقریباً ثابت می ماند. وقتی آن را در ظرف ساکنی بریزند قسمت پایین ظرف را پر می کند،

^۱ Drag

^۲ Stream lined objects

^۳ Lift

^۴ Turbulent

و سطح آزاد تشکیل می دهد. در اغلب محاسبات مایعات را غیر قابل تراکم فرض می کنیم و حتی وقتی سرعت جریان نسبت به سرعت صوت در گاز کوچک باشد گازها را هم غیر قابل تراکم در نظر می گیریم. معمولاً وقتی سرعت جریان از 0.3 سرعت صوت در آن سیال کمتر باشد تغییرات دانسیته در اثر تغییرات فشار بسیار کم و ناچیز است و جریان گاز (مثلاً هوا) را می توان در این سرعت ها غیر قابل تراکم فرض کرد. اگر سیال را ایده آل فرض کنیم (سیالی که غیر قابل تراکم بوده و لزجت آن صفر است)، کاربرد ریاضی در مطالعات سیالات آسان می شود. این سیال مثل سیال حقیقی جرم مخصوص دارد و می تواند جاری شود، اما در مقابل تغییر شکل مقاومتی نشان نمی دهد و بنابراین در سیال ایده آل تنش برشی نمی تواند موجود باشد. در ضمن سیال ایده آل نه کشش سطحی نشان می دهد و نه اینکه تبخیر می شود، پس کاویتاسیون یا حفره های بخار در آن به وجود نمی آید.

۱-۴- معرفی روش تحلیل جریان

حل یک مسئله جریان سیال ممکن است شامل نتایج کلی باشد و یا اینکه تمام جزئیات را شامل شود. انتخاب روش بررسی جریان بستگی به دقت مورد نظر و امکان حل جزئیات مساله دارد. بررسی با جزئیات بیشتر معمولاً نیازمند تجزیه و تحلیل پیشرفته می باشد و پیچیدگی زیادی نسبت به تشریح با جزئیات کمتر یک مسئله دارد. دقت مورد نیاز و همین طور هزینه رسیدن به حل می تواند در سطح بررسی یک مسئله تعیین کننده باشد.

یک مسئله را می توان در سیستم جرم ثابت یا حجم ثابت بررسی کرد. در مکانیک اجسام صلب عموماً سیستمی مورد مطالعه قرار می گیرد که همیشه شامل ذرات یکسان و در نتیجه جرم ثابت باشند. در حل مسائل مختلفی از مکانیک سیالات می توان قوانین مکانیک و ترمودینامیک مربوط به جرم ثابت را به کار گرفت؛ به طور مثال مسئله ای که مربوط به فشردن شدن گاز توسط پیستون داخل یک سیلندر است.

در اکثر مسائل جریان سیال به کارگیری یک سیستم شامل حجم کنترل (سیستم باز) به جای جرم ثابت (سیستم بسته) راحت تر و مناسب تر است. در استفاده از حجم ثابت یک مجموعه محور مختصات می توان تعریف کرد که نسبت به حجم ثابت هستند و جزئیات جریان سیال نسبت به این محور مختصات مورد مطالعه قرار می گیرند. چون قوانین مکانیک و ترمودینامیک معمولاً برای سیستم جرم ثابت نوشته می شوند این روابط باید به صورتی درآیند که بتوان آنها را در سیستم حجم ثابت به کار گرفت.

معمولاً بررسی جریان به صورت جرم ثابت و حجم ثابت را روش سیستم می نامند. در روش سیستم بدون آن که جزئیاتی که داخل سیستم اتفاق می افتد را بررسی کنیم، نتایج کلی به دست می آوریم، در حالی که برای بعضی مسائل جزییات بیشتر مورد نیاز است و روش سیستم به حل مورد نظر نمی رسد. در این مواقع با روش میدان که سعی در تشریح جریان در نقاط مختلف میدان جریان (تمام میدان) دارد می توان به حل مورد نظر رسید. در روش میدان، اطلاعات جریان در تمام نقاط با جزییات به دست می آید. بررسی با جزییات کمتر، که اکثراً در مطالعات جریان سیال استفاده می شود، روش /ویلری است. این روش منجر به روابطی می شود که مقادیر اصلی مشخصه جریان مثل سرعت، فشار و درجه حرارت یا جرم مخصوص را در هر نقطه در میدان جریان به صورت تابعی از مختصات نقطه و زمان معلوم می کند. روش پیچیده تر و با جزییات بیشتر روش لاگرانژی است که مقادیر اصلی جریان را برای هر ذره واقع در میدان جریان و موقعیت تمام ذرات را مشخص می کند. بنابراین در روش لاگرانژی هر ذره سیال دنبال می شود و وضعیتش بررسی می شود در حالی که در روش ویلری منحصرأ وضعیت در نقطه بدون اشاره به این که چه ذره ای آن نقطه را اشغال کرده است بررسی خواهد شد.

در اغلب کتاب های درسی هیدرولیک و مکانیک سیالات ابتدایی عموماً روش سیستم باز (حجم کنترل بزرگ) به کار گرفته می شود و معادلات به دست آمده در شکل انتگرالی و یا بعد از گرفتن انتگرال به شکل جبری می باشند، در صورتی که معادلات نتیجه شده از روش میدان، دیفرانسیلی و یا معادلات دیفرانسیلی پاره ای می باشند.

در هر روش فقط معدودی از مسائل مکانیک سیالات را می توان بدون تقریب حل کرد. در حقیقت علم مکانیک سیالات مطالعه روش ریاضی برای حل معادلات و نوع تقریبی که به کار گرفته می شود است تا نتیجه قابل استفاده را به دست دهد. همان طور که ذکر شد تقریب اولیه برای اکثر مسائل مربوط به ابعاد مسئله می باشد.

ما در دنیای سه بعدی تابع زمان زندگی می کنیم. مثلاً سرعت تابعی از سه مولفه مکان و بعد زمان می باشد. گر چه در طول قرن بیستم بیشتر مسائل مهندسی حل مسائل یک بعدی را در بر گرفته است ولی کامپیوتر و پیشرفت روش عددی امکان حل تعداد زیادی از مسائل چند بعدی را فراهم کرده است. البته حل تعداد مسائل سه بعدی و غیر دائمی (تابع زمان)، نسبت به کل مسائل سیالات، بسیار کم بوده و همه آنها هم قابل قبول نمی باشد (مخصوصاً در جریان مغشوش)، لذا یکی از تقریب های اصلی هنوز بعد جریان است.

۱-۵- تحلیل دیفرانسیلی جریان سیال

در کتب یا دروس سیالات مقدماتی عمدتاً برای حل مسائل سیالات، بررسی بر اساس حجم کنترل انجام می‌گیرد. وقتی که نیروی کلی، فشار و سرعت متوسط مورد نظر باشند این روش در بسیاری موارد مناسب و عملی است اما در تمام نقاط، وضعیت میدان جریان را با جزییات مشخص نمی‌کند. خیلی موارد وجود دارد که شرح کامل تمام نقاط جریان لازم می‌باشد و روش حجم کنترل بزرگ جواب مطلوب را نمی‌دهد. مثلاً برای به دست آوردن اطلاعات در رابطه با توزیع سرعت در مقطع لوله و یا هر مجرای دیگر، یا توزیع فشار و تنش برشی در سطح اجسام واقع در جریان، یا جریان روی پره‌های توربین یا بال هواپیما، که در این حالتها لازم است روابطی را به دست آوریم که اطلاعات را در تمام نقاط میدان جریان بدهد و در هر نقطه‌ای کاربرد داشته باشند. در روش اویلری، حجم کنترل دیفرانسیلی را باید در نظر گرفت که بررسی به صورت تحلیل جزیی است و روابط حاکم معادلات دیفرانسیل می‌باشند.

در این فصل سینماتیک جریان سیال و در فصول بعد به صورت مختصر معادلات دیفرانسیل حاکم بر جریان تجزیه و تحلیل می‌شوند. متأسفانه خواهیم دید که معادلات کلی بسیار پیچیده و به صورت معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیر قابل حل به صورت دقیق، می‌باشند مگر در حالت‌های ساده شده خاصی که بتوان فرضیات ساده‌کننده‌ای در جریان انجام داد و به این ترتیب در خیلی موارد می‌توان حل تحلیلی نسبتاً دقیق معادلات را به دست آورد، مثلاً در حالتی که اثرات لزجت بسیار ناچیز باشد (جریان غیر لزج، جریان پتانسیل) و یا در حالت جریان‌های بارینولدز بسیار کم.

برای رینولدزهای بالا در بعضی از جریان‌ها میدان جریان را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد: یکی لایه نازک نزدیک جدار که اثرات لزجت در آن لایه مهم است و دیگری ناحیه دور از جدار که جریان را اصولاً میتوان غیر لزج فرض کرد. با بعضی فرضیات در این لایه و فرض جریان غیر لزج در خارج از این لایه، بسیاری از مسائل جریان سیال به صورت تحلیلی قابل حل خواهند بود.

باید توجه داشت که با در دسترس بودن کامپیوترهای قوی، بسیاری از معادلات دیفرانسیل جریان را می‌توان با روش عددی چه به صورت تفاضل‌های محدود^۱، یا المان‌های محدود^۲ و یا حجم محدود^۳ و... حل کرد که به صورت کلی این روشها را دینامیک سیالات محاسباتی^۴ یا به صورت کوتاه (CFD) می‌نامند.

^۱ Finite difference

^۲ Finite elements

^۳ Finite volume

^۴ Computational Fluid Dynamics

در جریان های آرام (لایه ای) مسائل زیادی با استفاده از روش CFD حل شده و یا قابل حل می باشند، ولی هنوز مسائل بیشماری مخصوصاً در جریان های پیچیده مغشوش موجودند که حل آنها حتی با استفاده از کامپیوترهای بسیار قوی امکان پذیر نمی باشند و در تعداد محدودی از جریان های مغشوش هم باید مدل مناسب برای جریان مغشوش انتخاب کرد. معمولاً در مسائل فعلی که جریان مغشوش داریم می توان با استفاده از مدل های توربولانسی، مسئله را به صورت قابل حل درآورد.

در نتیجه در اغلب مسائل لازم است که برای شرایط خاص روابط را ساده کرد تا معادلات دیفرانسیل قابل حل باشد. لذا باید توجه داشت که هر رابطه به دست آمده برای چه شرایطی است و فقط در آن شرایط از رابطه استفاده کرد.

۱-۶- بحث در برخی شرایط مسئله

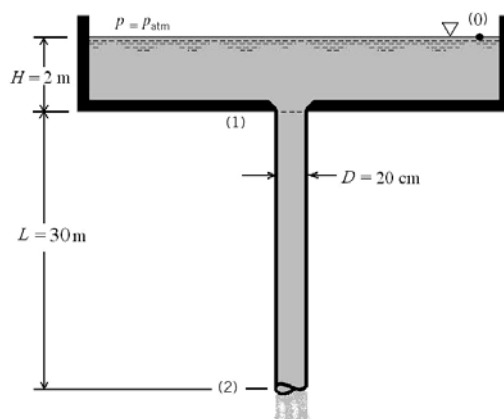
گفتیم که برای به دست آوردن روابط به صورت ساده و قابل استفاده شرایطی در جریان فرض می شود، مثل جریان دائمی، یکنواخت، غیر قابل تراکم، غیر لزج، یک بعدی و . . . پس در کاربرد هر رابطه باید شرایط به دست آوردن آن رابطه را بدانیم و در صورتی که آن شرایط عملاً صادق باشد برای حل آن مسائل، روابطی را که در آن حالت صادق است به کار ببریم.

به عنوان مثال، در رابطه ساده پیوستگی $V_1 A_1 = V_2 A_2$ شرایط یک بعدی، غیر قابل تراکم و دائمی فرض شده و رابطه برای دو مقطع یک لوله جریان به دست آمده است، یا رابطه برنولی به صورت زیر:

$$\frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + Z = \text{ثابت} \quad (۱-۲)$$

برای جریان سیال غیر لزج، غیر قابل تراکم، دائمی، و روی خط جریان به دست آمده است.

مثال ۱-۱) مطابق شکل (۱-۳)، آب $20^\circ C$ از کف مخزن بسیار بزرگی که سطح آزاد آن همواره ثابت می ماند توسط لوله صافی به قطر $D=0.2m$ و طول $L=30m$ در حال تخلیه می باشد. اگر ضریب اصطکاک لوله $f=0.01$ و ضریب افت موضعی در مقطع (۱) برابر با $k=0.2$ باشد، فشارمطلق در نقطه (۱) را محاسبه کنید. محاسبات را با طول لوله $L=35m$ تکرار کنید.



شکل ۳-۱: مخزن مربوط به مثال (۱-۱)

حل -

با نوشتن رابطه برنولی بین نقاط (0) و (1) داریم:

$$\frac{P_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} + H = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + 0 \quad \rightarrow \quad \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = 2 \quad (1)$$

رابطه انرژی بین مقاطع (1) و (2) با توجه به اینکه $P_2 = P_0 = P_{atm}$ می دهد:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + L = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + 0 + (k + f \frac{L}{D}) \frac{V_1^2}{2g} \quad (2)$$

با توجه به رابطه پیوستگی $V_1 = V_2 = V$ با جایگذاری از رابطه (۱) در (۲) و $L = 25m$ خواهیم داشت:

$$2 + 30 = (1 + k + f \frac{L}{D}) \frac{V^2}{2g} \quad \rightarrow \quad \frac{V^2}{2g} = \frac{32}{1 + 0.2 + (0.01) \frac{30}{0.2}} = \frac{32}{2.7} = 11.85 \text{ m}$$

بنابراین از رابطه (۱) برای فشار نسبی در نقطه مورد نظر داریم:

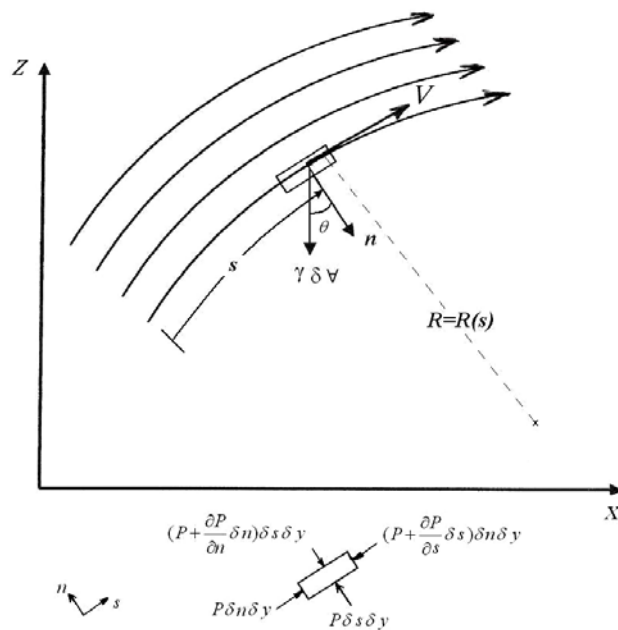
$$\frac{P_1}{\gamma} = 2 - 11.85 = -9.85 \text{ m}$$

و چون فشار مطلق اتمسفر برابر $P_{atm} = 10.33 \text{ m}$ آب است، بنابراین مشاهده می شود که فشار مطلق در ورودی لوله حدوداً برابر 0.48 متر آب می شود، ولی اگر طول لوله از 33m بیشتر شود فشار مطلق در ورودی لوله یک مقدار منفی می شود که امکان ندارد. در حقیقت در این نقطه، حداقل فشار می تواند فشار تبخیر آب $20^\circ C$ باشد، در غیر این صورت آب شروع به تبخیر شدن می کند و پدیده کاویتاسیون رخ می دهد. یعنی در این مثال، در طول خاصی از لوله وقتی کاویتاسیون رخ دهد جریان سیال، غیر قابل تراکم و با ρ ثابت نیست و در این صورت به کار بردن رابطه برنولی ویا انرژی صحیح نیست.

۷-۱- رابطه قانون دوم نیوتن در امتداد عمود بر خط جریان

بردار شتاب بصورت $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ تعریف می شود. مطابق شکل (۱-۷) برای ذره ای از سیال روی یک خط جریان، در حالت دو بعدی و در صفحه $x-z$ بردار شتاب شامل دو مولفه، یکی a_s در راستای خط جریان و دیگری a_n در راستای عمود بر خط جریان می باشد. با توجه به سرعت جریان $V = V(s)$ خواهیم داشت:

$$a_s = \frac{dV(s)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt} = V \frac{\partial V}{\partial s}, \quad a_n = \frac{V^2}{R}$$



شکل (۱-۷): نیروهای وارد بر ذره سیال روی یک خط جریان در صفحه $x-z$

قانون دوم نیوتن را برای ذره ای از سیال به حجم δV با جرم δm مطابق شکل (۱-۷) در جهت عمود بر خط جریان به کار می بریم:

$$\sum \delta F_n = \frac{\delta m}{R} V^2 = \frac{(\rho \delta V) V^2}{R} \quad (۱-۳)$$

مولفه نیروی ثقل در جهت عمود بر خط جریان را می توان به صورت $-\gamma \delta V \cos \theta = -\gamma \delta V \frac{dz}{dn}$ نوشت. همچنین با توجه به شکل، خالص نیروی فشار وارد بر ذره سیال در راستای عمود بر خط جریان برابر است با:

$$P \delta s \delta y - (P + \frac{\partial P}{\partial n} \delta n) \delta s \delta y = - \frac{\partial P}{\partial n} \delta \forall$$

رابطه (۳-۱) در امتداد n عمود بر جهت جریان با جایگذاری نیروهای وارد بر المان و تقسیم کلیه جملات بر حجم $\delta \forall$ به صورت زیر می گردد:

$$-\gamma \frac{dz}{dn} - \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\rho V^2}{R} \quad (۴-۱)$$

اگر جریان افقی باشد $\frac{dz}{dn} = 0$ ، یا بتوان از نیروی ثقل صرف نظر کرد $\gamma \approx 0$ رابطه (۴-۱) به صورت

$$\frac{\partial p}{\partial n} = - \frac{\rho V^2}{R}$$

می شود که نشان می دهد فشار با فاصله از مرکز انحناء افزایش می یابد. اگر s ثابت باشد، $\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{dP}{dn}$ در این حالت با ضرب رابطه (۴-۱) در dn و انتگرال گیری در راستای عمود بر خط جریان خواهیم داشت:

$$\int \frac{P}{\rho} + \int \frac{V^2}{R} dn + g z = \text{ثابت} \quad (۵-۱)$$

و برای جریان غیر قابل تراکم در امتداد عمود بر خط جریان داریم:

$$P + \rho \int \frac{V^2}{R} dn + \gamma z = \text{ثابت} \quad (۶-۱)$$

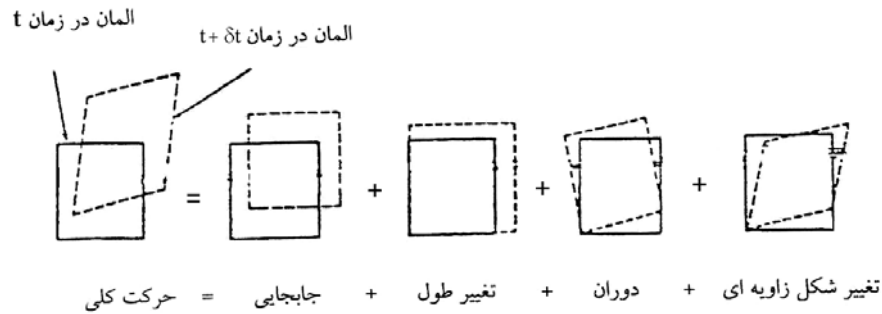
اگر خط جریان مستقیم باشد، یعنی $R \rightarrow \infty$ رابطه فوق به صورت، ثابت $P + \gamma z =$ ساده می شود که در این حالت، تغییرات در این جریان به صورت هیدرو استاتیکی است.

به روش مشابه، می توان نشان داد رابطه برنولی برای جریان غیر قابل تراکم در امتداد خط جریان به صورت زیر به دست می آید:

$$P + \frac{1}{2} \rho V^2 + \gamma z = \text{ثابت} \quad (۷-۱)$$

۸-۱- آنالیز دیفرانسیلی المان سیال

حرکت کلی سیال مطابق شکل (۵-۱) شامل تغییر مکان، تغییر طول یا حجم، دوران، تغییر زاویه می باشد.



شکل ۱-۵: حرکت کلی المان سیال شامل تغییر مکان، تغییر طول، دوران و تغییر زاویه

۱-۸-۱- سرعت و شتاب میدان جریان

سرعت در میدان جریان تابعی از مکان و زمان می باشد در سیستم مختصات کارتزین، بردار سرعت و بردار شتاب به ترتیب عبارتند از:

$$\vec{V} = \hat{i}u + \hat{j}v + \hat{k}w \quad (۱-۸)$$

$$\vec{a} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} \quad (۱-۹)$$

بردار شتاب کلی در سیستم کارتزین با توجه به تعریف مشتق کامل، شامل شتاب محلی^۱ و شتاب جابجایی^۲ است:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{Local acceleration}} + \underbrace{u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}}_{\text{Convective acceleration}} \quad (۱-۱۰)$$

بنابراین مولفه های بردار شتاب کلی، در سیستم کارتزین عبارتند از:

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (۱-۱۱)$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (۱-۱۲)$$

$$a_z = \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (۱-۱۳)$$

^۱ Local acceleration

^۲ Convective acceleration

شتاب کلی به این صورت خواهد بود:

$$\vec{a} = \hat{i} a_x + \hat{j} a_y + \hat{k} a_z \quad (۱۴-۱)$$

با توجه به تعریف مشتق کامل:

$$\frac{D()}{Dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + u \frac{\partial()}{\partial x} + v \frac{\partial()}{\partial y} + w \frac{\partial()}{\partial z} \quad (۱۵-۱)$$

و با توجه به تعریف اپراتور دل $\nabla()$ به صورت:

$$\nabla() = \frac{\partial()}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial()}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial()}{\partial z} \hat{k} \quad (۱۶-۱)$$

می توان نوشت:

$$\frac{D()}{Dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + (V \cdot \nabla)() \quad (۱۷-۱)$$

پس برای شتاب کلی خواهیم داشت:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (V \cdot \nabla) \vec{V} \quad (۱۸-۱)$$

و مولفه های بردار شتاب را می توان چنین نوشت:

$$\vec{a}_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + (V \cdot \nabla) u \quad (۱۹-۱)$$

$$\vec{a}_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial t} + (V \cdot \nabla) v \quad (۲۰-۱)$$

$$\vec{a}_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + (V \cdot \nabla) w \quad (۲۱-۱)$$

۱-۸-۲- حرکت خطی و تغییر طول المان (تغییر حجم)

اگر سرعت تمام نقاط المان یکسان باشد فقط تغییر مکان داریم. تغییر سرعت باعث تغییر طول و تغییر شکل زاویه ای و دوران (چرخش) می شود. اگر تغییر سرعت فقط در امتداد جهت سرعت باشد تنها باعث تغییر طول می شود، مثلاً اگر تغییر سرعت u در امتداد جهت x باشد تغییر طول نیز در امتداد x خواهد بود.

مطابق شکل (۱-۶) حجم اولیه المان δV برابر است با:

$$\delta V = \delta x \delta y \delta z \quad (۲۲-۱)$$

و تغییر حجم در جهت x در زمان δt برابر است با:

$$d[\delta V]_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \delta x (\delta t) \right) (\delta y \delta z)$$

$$d\left[\frac{\delta \nabla}{\delta t}\right] = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (۲۳-۱)$$

پس نرخ تغییر حجم در واحد حجم در جهت x به صورت زیر است:

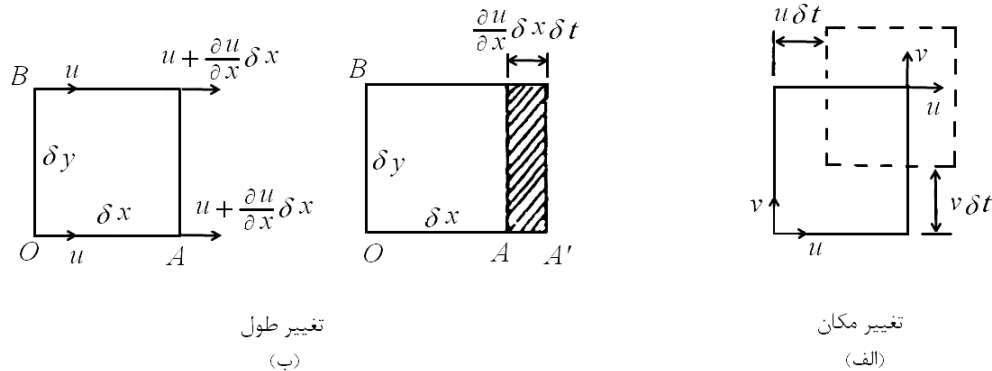
$$\left[\frac{1}{\delta \nabla} d\left(\frac{\delta \nabla}{\delta t}\right)\right]_x = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{(\partial u / \partial x) \delta x \delta y \delta z}{\delta x \delta y \delta z} \right]_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (۲۴-۱)$$

در جهات مختلف، نرخ تغییر حجم در واحد حجم با تغییر سرعت در جهت سرعت V و W به ترتیب برابر $\frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial w}{\partial z}$ می باشد.

پس نرخ تغییر حجم کل المان در واحد حجم (نرخ دایلیشن^۱) برابر است با:

$$\frac{1}{\delta \nabla} \frac{d \nabla}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V} \quad (۲۵-۱)$$

برای سیالی که تغییر حجم آن صفر باشد، داریم $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ که همان رابطه پیوستگی برای جریان سیال غیر قابل تراکم است.



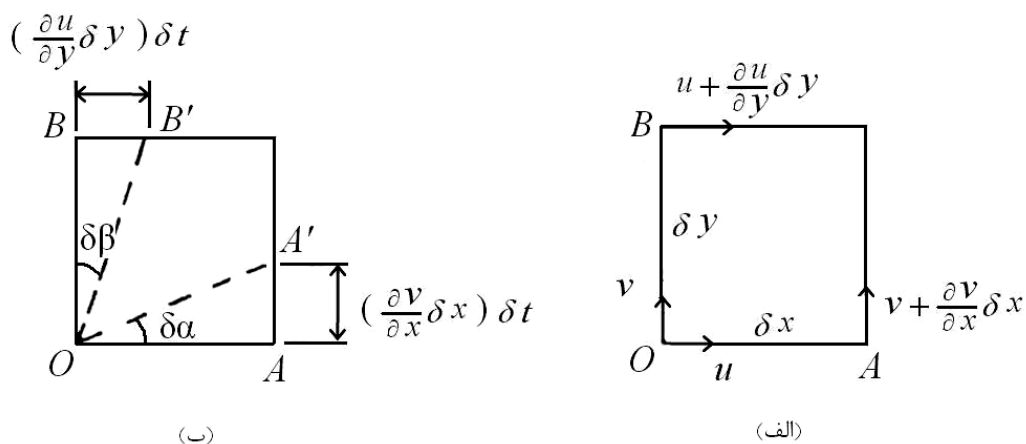
شکل ۱-۶: (الف) - تغییر مکان یک المان سیال (ب) - تغییر طول یک المان سیال

۱-۸-۳- چرخش (دوران)

برای بیان ساده مفهوم چرخش^۲، صفحه $x-y$ را در نظر می گیریم ولی می توان نتیجه را به حالت کلی در تمام صفحات تعمیم داد. تغییرات سرعت که باعث دوران و تغییر شکل زاویه ای می شود در امتداد عمود بر جهت حرکت می باشد. در شکل (۷-۱) می توان دید که تغییرات سرعت v در جهت حرکت x و تغییر سرعت u در جهت حرکت y باعث تغییر زاویه المان در صفحه $x-y$ و دوران المان حول محور z می شود.

¹ Dilatation (Dilation)

² Rotation



شکل ۱-۷: (الف) - تغییرات سرعت در یک المان سیال (ب) - تغییر شکل زاویه ای در المان سیال

در زمان کوتاه δt پاره خط های OA و OB به اندازه زاویه $\delta\alpha$ و $\delta\beta$ تغییر کرده و به وضع جدید

OA' و OB' در آمده است. سرعت زاویه ای خط OA یعنی ω_{OA} برابر است با:

$$\omega_{OA} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\alpha}{\delta t} \quad (1-26)$$

برای زاویه کوچک $\delta\alpha$ ، وقتی δt خیلی کوچک باشد ($\delta t \rightarrow 0$) مقدار زاویه با تانژانت زاویه برابر است، بنابراین داریم:

$$\tan \delta\alpha \approx \delta\alpha = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x} \delta x\right) \delta t}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} \delta t \quad (1-27)$$

پس سرعت زاویه ای خط OA در صفحه xy برابر است با:

$$\omega_{OA} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\partial v}{\partial x} \delta t}{\delta t} \right] = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1-28)$$

باید توجه داشت که اگر $\frac{\partial v}{\partial x}$ مثبت باشد ω_{OA} در خلاف جهت عقربه های ساعت است. مشابه فوق

سرعت زاویه خط OB برابر خواهد بود با:

$$\omega_{OB} = - \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\beta}{\delta t} \quad (1-29)$$

و برای زاویه کوچک $\delta\beta$:

$$\tan \delta\beta \approx \delta\beta = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \delta y\right) \delta t}{\delta y} = \frac{\partial u}{\partial y} \delta t \quad (۳۰-۱)$$

پس سرعت زاویه ای خط OB که در جهت عقربه های ساعت است برابر است با:

$$\omega_{OB} = -\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\partial u}{\partial y} \delta t}{\delta t} \right] = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (۳۱-۱)$$

در این حالت اگر $\frac{\partial u}{\partial y}$ مثبت باشد ω_{OB} جهت عقربه های ساعت خواهد داشت و ω_{OB} منفی می شود.

چرخش یک المان در یک نقطه از صفحه، مثل نقطه O در صفحه $x-y$ حول محور Z (یعنی ω_z) برابر است با متوسط سرعت زاویه ای دو پاره خط واقع در صفحه $x-y$ که از نقطه O می گذرد، مثل دو

پاره خط OA و OB (متوسط ω_{OA} ، ω_{OB}) که طبق تعریف برابر است با $\omega_z = \frac{\omega_{OA} + \omega_{OB}}{2}$.

بنابراین اگر خلاف جهت عقربه های ساعت را مثبت انتخاب کنیم، نتیجه می شود که چرخش حول محور Z به صورت زیر است:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (۳۲-۱)$$

چرخش یا دوران المان سیال حول دو محور دیگر را نیز می توان مشابه با روش فوق به دست آورد که نتایج زیر حاصل می شود.

چرخش حول محور X :

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (۳۳-۱)$$

و چرخش حول محور y :

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (۳۴-۱)$$

سه مولفه ω_x ، ω_y ، ω_z را می توان مولفه های بردار کل چرخش $\vec{\omega}$ در نظر گرفت:

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k} \quad (۳۵-۱)$$

با مقایسه و مطالعه نتیجه می توان دید که $\vec{\omega}$ برابر با نصف کرل بردار سرعت است بنابراین:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{Curl } \vec{V} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{V} \quad (۳۶-۱)$$

کرل را می توان به صورت های مختلف نوشت:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{V} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (۱-۳۷)$$

بردار ورتیستی^۱ (ز تا ζ) دو برابر بردار چرخش تعریف می شود:

$$\zeta = 2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = \text{Curl} \vec{V} \quad (۱-۳۸)$$

با کاربرد ورتیستی برای مشخص کردن چرخش ($\vec{\omega}$) می توان روابط را ساده تر کرد و ضریب ($\frac{1}{2}$) را در چرخش حذف نمود.

در هر سیستمی از جمله سیستم مختصات استوانه می توان کرل یا چرخش را مشخص کرد:

$$\text{Curl} \vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\theta & v_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left[\hat{e}_r \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial rv_\theta}{\partial z} \right) - r\hat{e}_\theta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \hat{e}_z \left(\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right] \quad (۱-۳۹)$$

از رابطه $\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ مشاهده می شود که وقتی المان سیال حول محور بدون تغییر شکل و به صورت یک بلوک ثابت می چرخد که $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ باشد، در غیر این صورت چرخش با تغییر شکل همزمان خواهد بود.

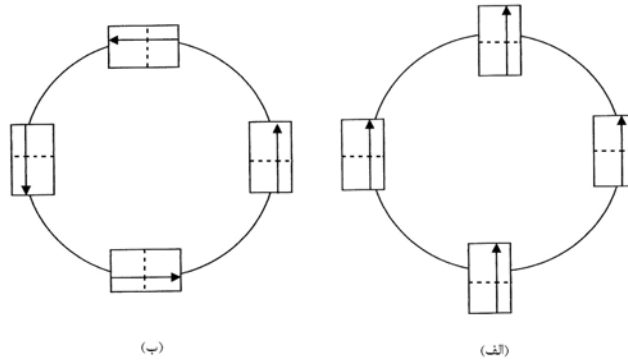
ما همچنین از رابطه های فوق مشاهده می کنیم که وقتی $\omega_{OA} = -\omega_{OB}$ یعنی $\left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$ باشد چرخش حول محور Z صفر است، اما تغییر شکل داریم. در حالتی که $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ باشد تغییر شکل نداریم و چرخش حول محور Z صفر می شود. در حالت کلی وقتی $\nabla \times \vec{V} = 0$ باشد ورتیستی و چرخش صفر است و در جریانی که رابطه $\text{Curl} \vec{V} = 0$ برقرار باشد آن جریان را غیر چرخشی^۲ می گویند.

بعداً خواهیم دید که شرایط غیر چرخشی اغلب باعث ساده شدن تحلیل و بررسی یک میدان جریان پیچیده خواهد شد. چرخش دور زدن نیست بلکه دور خود چرخیدن است پس چرخش یک المان

^۱ Vorticity vector

^۲ Irrotational

به مسیر حرکت آن ربطی ندارد چه مسیر مستقیم و یا منحنی باشد چرخش یک المان می تواند صفر یا مقدار داشته باشد مثلاً در حرکت قطار، اگر چرخ را یک المان و واگن را المان دیگر در نظر بگیریم، در هر مسیری که قطار حرکت کند، چرخ حرکت چرخشی دارد ولی چرخش واگن صفر است. در شکل (۸-۱) مفهوم دور زدن بدون چرخش و دور زدن با چرخش نشان داده شده است.



شکل ۸-۱: (الف) دور زدن بدون چرخش (ب) دور زدن با چرخش

۸-۱-۴- تغییر شکل زاویه ای (کرنش برشی) و نرخ تغییر شکل زاویه ای (نرخ کرنش برشی)

علاوه بر چرخش که بستگی به مشتقات $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ دارد می توان دید که این مشتقات می تواند باعث تغییر زاویه^۱ این المان سیال شود. تغییرات زاویه دو پاره خط OA و OB را تغییر شکل زاویه ای (کرنش زاویه ای یا کرنش برشی) می نامند و آن را با $\delta\gamma$ نشان می دهند:

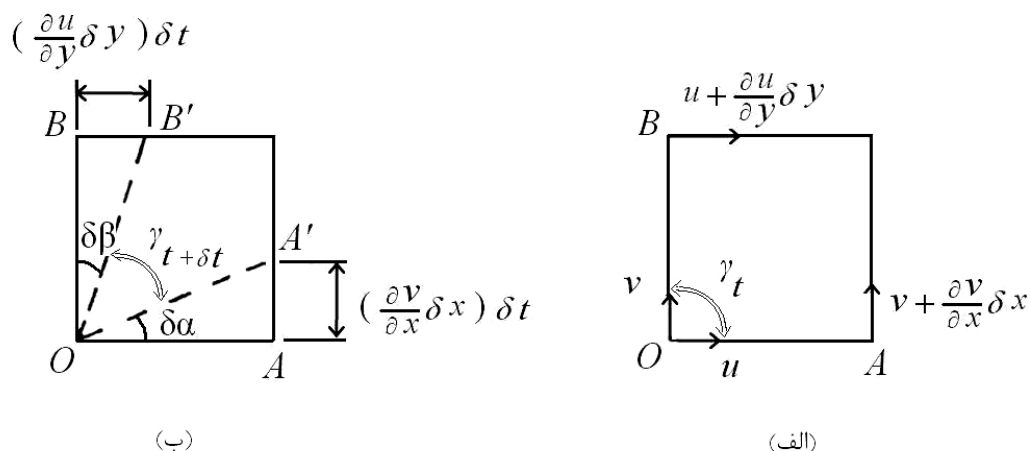
$$\delta\gamma = \delta\alpha + \delta\beta \quad (۴۰-۱)$$

$\delta\gamma$ تغییرات زاویه دو پاره خط OA و OB از حالت قائم اولیه است؛ و اگر زاویه کاهش یابد $\delta\gamma$ مثبت در نظر گرفته می شود. نرخ تغییرات $\delta\gamma$ را نرخ تغییر شکل زاویه ای^۲ یا نرخ کرنش برشی^۳ می نامند. و معمولاً با علامت $\dot{\gamma}$ نشان می دهند.

^۱ Angular deformation

^۲ Rate of angular deformation

^۳ Rate of shearing strain



شکل ۹-۱: (الف) - تغییرات سرعت در یک المان سیال (ب) - تغییر زاویه در المان سیال

نرخ تغییر شکل زاویه ای یا نرخ کرنش برشی از رابطه زیر به دست می آید:

$$\dot{\gamma}_z = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \gamma}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \alpha + \delta \beta}{\delta t} \quad (۱-۴۱)$$

از روابط قبل داریم:

$$\tan \delta \alpha \approx \delta \alpha = \frac{\partial v}{\partial x} \delta t, \quad \tan \delta \beta \approx \delta \beta = \frac{\partial u}{\partial y} \delta t \quad (۱-۴۲)$$

پس می توان دید که:

$$\dot{\gamma}_z = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \gamma}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta \alpha + \delta \beta}{\delta t} \right) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta t + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta t}{\delta t} \right) \quad (۱-۴۳)$$

در نتیجه:

$$\dot{\gamma}_z = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (۱-۴۴)$$

که نرخ تغییر شکل زاویه ای صفحه Z روی صفحه X-Y است.

و در صفحات X و Y داریم:

$$\dot{\gamma}_x = \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (۱-۴۵)$$

$$\dot{\gamma}_y = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (۱-۴۶)$$

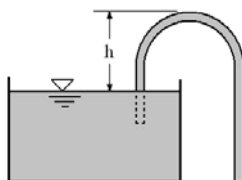
تمرین های فصل اول

- ۱-۱- تفاوت اصلی سیال و جامد چیست؟
- ۲-۱- جریان تراکم ناپذیر چه تعریفی دارد؟
- ۳-۱- سیال نیوتنی چه سیالی است؟
- ۴-۱- سرعت نزدیک جدار در جریان سیال ایده آل و سیال حقیقی چه تفاوت کلی دارند؟
- ۵-۱- چرخش را تعریف کنید، توضیح دهید که جریان غیر چرخشی چیست؟
- ۶-۱- نرخ کرنش زاویه ای یا تغییر شکل زاویه ای را تعریف کنید.
- ۷-۱- آیا رابطه (۱-۱) فقط در جریان آرام یک سیال نیوتنی صادق است یا در هر جریانی صادق می کند؟ توضیح دهید.
- ۸-۱- اگر سرعت جریان آب کمتر از 0.3 سرعت صوت در آب باشد ولی کاویتاسیون رخ دهد، آیا می توان جریان را غیر قابل تراکم فرض کرد؟
- ۹-۱- در پرسش قبلی، با وجود حبابهای بخار آیا می توان از رابطه برنولی استفاده کرد؟ چرا؟
- ۱۰-۱- توضیح دهید چرا در جریان غیر قابل تراکم در طول یک لوله با سطح مقطع متغیر، می توان رابطه پیوستگی $Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$ را در هر لحظه در مقاطع مختلف به کار برد؟
- ۱۱-۱- آیا رابطه $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ در هر جریانی صادق است؟ در غیر این صورت در چه نوع جریانی و چه صفحه ای صادق است؟
- ۱۲-۱- رابطه برنولی حالت بقاء جرم را مشخص می کند یا حالت بقاء انرژی را؟

۱۳-۱- در شکل زیر، حداکثر ارتفاع سیفون، h در حالات زیر چقدر می تواند باشد تا شرایط

پیوستگی مایع به دلیل تبخیر شدن آن نقض نشود؟ از افت فشار ناشی از اصطکاک،

صرف نظر کنید.



شکل ۱-۱۰: مربوط به تمرین ۱۳-۱

الف- سیال درون مخزن، آب با چگالی $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$ باشد.

ب- سیال درون مخزن، بنزین با چگالی $\rho = 760 \frac{kg}{m^3}$ باشد.

۱۴-۱- در مثال (۱-۱) اگر $H = 1m$ باشد، حداکثر طول لوله، L را که در آن شرایط استفاده از

معادله برنولی، نقض نمی شود به دست آورید.

۱۵-۱- با کاربرد قانون دوم نیوتن برای ذره ای از سیال به حجم δV مطابق شکل (۱-۴) در

امتداد خط جریان، رابطه برنولی: ثابت $= \int \frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + g z$ را به دست آورید.

۱۶-۱- در چه حالتی، دوران سیال با ω ثابت مانند حرکت یک جامد حول محور قائم

می باشد؟

۱۷-۱- با توجه به اینکه در مختصات استوانه ای با میدان سرعت $\vec{V} = v_r \hat{e}_r + v_\theta \hat{e}_\theta + v_z \hat{e}_z$

رابطه $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z$ برقرار است، رابطه شتاب را در مختصات

استوانه ای به دست آورید و جملات شتاب محلی و شتاب جابجایی را مشخص نمایید.

فصل دوم

معادلات بقاء برای حجم کنترل

۲-۱- حالت کلی

به طور کلی ارتباط بین نرخ تغییرات یک خاصیت کمّی دلخواه B در یک سیستم (مانند جرم، اندازه حرکت خطی، اندازه حرکت زاویه ای و انرژی) به تغییرات زمانی همین خاصیت در حجم کنترل در لحظه ای که سیستم و حجم کنترل بر همدیگر منطبق و دارای مرزهای یکسانی باشند، بوسیله قانون انتقال رینولدز^۱ که روش سیستم را به روش حجم کنترل تبدیل می کند، بیان می شود. برای هر خاصیت کمّی سیال مانند B این قانون به صورت زیر برقرار است:

نرخ تغییرات هر خاصیت کمّی B یک سیستم جرم ثابت، برابر است با مجموع نرخ زمانی تغییرات خاصیت در حجم کنترل و نرخ کلی هرخاصیت که از حجم کنترل خارج می شود.

$$\left[\frac{DB}{Dt} \right]_{\text{sys}} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta B}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho b dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{out} - B_{in}}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho b dV + \iint_{CS} \rho b V \cdot n dA \quad (2-1)$$

در این رابطه، b مقدار خاصیت دلخواه مورد نظر در واحد جرم می باشد.

¹ Reynolds transport equation

۲-۲- بقاء جرم

در سیستم جرم ثابت، وقتی جرم در میدان جریان حرکت می کند مقدار آن ثابت است و به عبارت دیگر: $\frac{DM_{sys}}{Dt} = 0$ ، که این همان قانون بقاء جرم برای سیستم است. قانون بقاء جرم برای حجم کنترل به صورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2-2)$$

که برای یک حجم مشخص یا حجم کنترل (C.V.)^۱ که به وسیله سطح مشخصی (C.S.)^۲ محدود شده باشد، قابل استفاده است که چون فقط شرط پیوستگی در سیال لازم است، این رابطه، رابطه پیوستگی خوانده می شود. جمله اول سمت چپ، نرخ زمانی تغییرات جرم داخل حجم کنترل می باشد و جمله دیگر آن، نرخ کل خروجی جرم منهای نرخ ورودی جرم می باشد.

۲-۲-۱- رابطه پیوستگی به صورت دیفرانسیل

برای به دست آوردن این رابطه یک حجم کنترل کوچک مطابق شکل (۲-۱) انتخاب می کنیم که در آن جرم مخصوص ρ و مولفه های سرعت u ، v و w می باشند. چون المان کوچک است می توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \quad (2-3)$$

و نرخ جرمی که از هر سطح عبور می کند را می توان با مولفه های جرمی که در امتداد هر محور می گذرد در نظر گرفت. مثلاً اگر نرخ شار جرمی جریان در امتداد x در مرکز المان را ρu بگیریم برای نرخ خروجی منهای نرخ ورودی جرم در جهت x خواهیم داشت:

$$-\left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right] \delta y \delta z + \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right] \delta y \delta z = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (2-4)$$

و به همین ترتیب در جهات دیگر می توان آن را به دست آورد، خالص نرخ جرم در جهت y

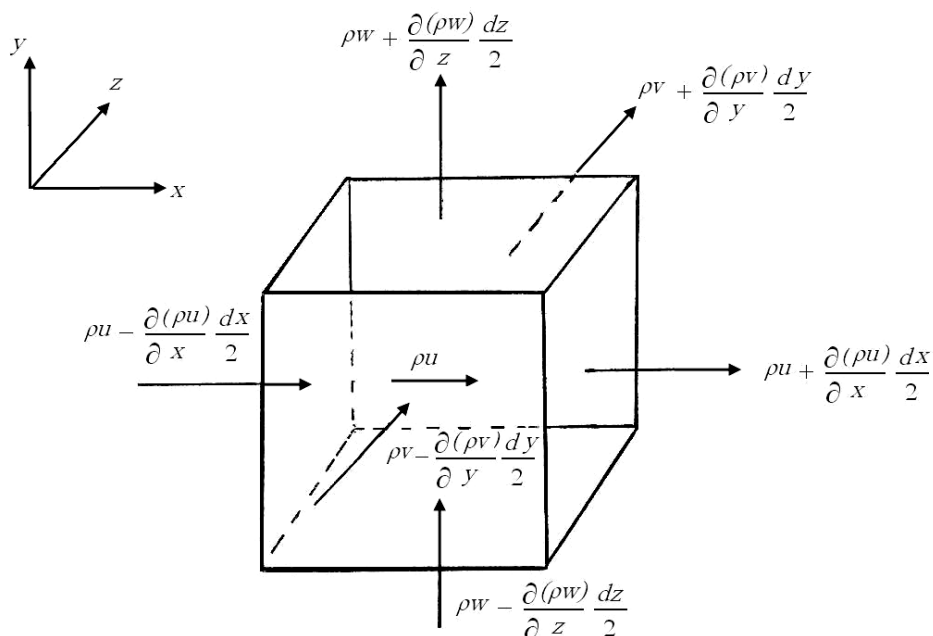
$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (2-5)$$

و خالص نرخ جرم در جهت z

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (2-6)$$

¹ Control volume

² Control surface



شکل ۲-۱: یک حجم کنترل کوچک برای محاسبه رابطه پیوستگی

پس نرخ کل جرم خروجی از المان:

$$\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (۷-۲)$$

است. از رابطه بقاء جرم (۷-۲) و نرخ تغییرات جرم داخل المان حجم کنترل (۳-۲) و پس از تقسیم دو طرف روابط به $\delta x \delta y \delta z$ نتیجه می شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (۸-۲)$$

که این فرمول به رابطه دیفرانسیلی پیوستگی معروف است و یکی از روابط اصولی مکانیک سیالات است و برای جریان غیر دائمی یا دائمی قابل تراکم چه سیال لزج و چه غیر لزج باشد صادق است. رابطه پیوستگی به صورت برداری برابر است با:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (۹-۲)$$

و به صورت اندیسی، مطابق زیر است:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \vec{V}_i) = 0 \quad (۱۰-۲)$$

که معادله ای کلی است، اگر بردار سرعت را در هر سیستم مختصات بنویسیم رابطه پیوستگی در آن سیستم مختصات مشخص می شود. مثلاً در سیستم مختصات استوانه ای داریم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (۱۱-۲)$$

و رابطه فوق برای سیال غیر قابل تراکم به صورت زیر در می آید:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (۱۲-۲)$$

۲-۲-۲- تابع جریان

جریان دائمی غیر قابل تراکم دو بعدی روی صفحه یکی از ساده ترین حالت های جریان می باشد که در عمل کاربرد فراوان دارد. در جریان دو بعدی فقط دو مولفه سرعت داریم مثلاً در جریان دائمی غیر قابل تراکم روی صفحه X و Y ؛ دو مولفه سرعت u و v داریم که رابطه پیوستگی برای این جریان می باشد.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

در اینجا با دو متغیر u و v سر و کار داریم که به صورت رابطه فوق به هم مربوط می شوند. از این رابطه می توان تابعی در جریان دو بعدی روی صفحه به صورت $\psi(x, y)$ تعریف نمود به طوری که با مولفه های سرعت به صورت زیر رابطه داشته باشد:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (۱۳-۲)$$

به این تابع $\psi(x, y)$ - تابع جریان^۱ روی صفحه می گوئیم. با توجه به تعریف تابع جریان، این تابع در معادله پیوستگی صدق می کند که می توان به سادگی به صورت زیر نشان داد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0 \quad (۱۴-۲)$$

بنابراین هر وقت که مولفه های سرعت بر حسب تابع جریان تعریف شوند می دانیم که شرایط بقاء جرم حاصل است که می تواند معرف جریان دو بعدی، دائمی و غیر قابل تراکم باشد.

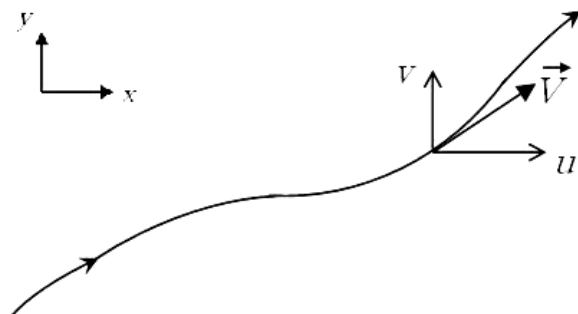
البته ما هنوز برای جریان خاصی نمی دانیم که تابع جریان $\psi(x, y)$ - آن به چه صورتی است، اما حداقل کاری که انجام داده ایم این است که تجزیه و تحلیل را ساده تر کرده ایم، چون به جای دو تابع مجهول $u(x, y)$ و $v(x, y)$ فقط یک تابع $\psi(x, y)$ را به دست می آوریم و مجهول ما از دو به یک کاهش می یابد. چنانچه تابع جریان تعیین گردد از خواص تابع جریان اطلاعات زیادی درباره جریان مشخص می شود.

خطی که در امتداد آن ψ ثابت است یک خط جریان می باشد. تعریف کردیم که خطوط جریان خطوطی در میدان جریان هستند که در هر جای آن بردار سرعت بر آن مماس می باشد و از این

¹ Stream Function

تعریف با توجه به شکل (۲-۲) می توان نتیجه گرفت که شیب (ضریب زاویه) هر نقطه روی خط جریان در صفحه $x-y$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad (۲-۱۵)$$



شکل ۲-۲: شماتیک یک خط جریان

تغییرات ψ از نقطه (x, y) به نقطه مجاور نزدیک $(x + dx, y + dy)$ ، از رابطه زیر مشخص می شود:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy \quad (۲-۱۶)$$

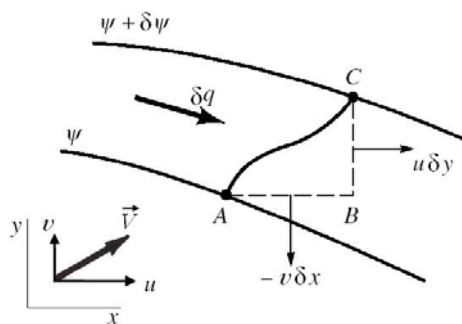
و چون در امتداد خط ψ ثابت داریم $d\psi = 0$ پس در امتداد خط ψ ثابت:

$$u dy - v dx = 0 \quad (۲-۱۷)$$

و در نتیجه روی خط ψ ثابت $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$ است که همان معادله خط جریان است. بنابراین اگر ψ را بدانیم می توانیم با قرار دادن ψ برابر ثابت های مختلف دسته خطوط جریان را رسم کنیم که به تجسم شکل و الگوی جریان کمک می کند. عدد ثابت هر خط جریان، معنی خاصی ندارد اما تغییرات ψ رابطه ای با مقدار دبی جریان دارد.

دو خط جریان با فاصله کمی از هم را در نظر بگیرید طبق شکل (۲-۳) خط جریان پایینی ψ و خط جریان بالایی $\psi + \delta\psi$ می باشد. δq را معرف نرخ جریان (دبی) برای واحد عمق در جهت عمود بر صفحه $x-y$ یعنی جهت z در نظر می گیریم که از بین دو خط جریان می گذرد (چون می دانیم دبی طبق تعریف، خط جریان را قطع نمی کند). طبق قانون بقای جرم δq که از سطح AC عبور می کند، برابر است با مقدار کل جریانی که از سطوح AB و BC می گذرد:

$$\delta q = u(\delta y) - v(\delta x)$$



شکل ۲-۳: جریان عبوری از بین دو خط جریان

به صورت دیفرانسیلی می توان نوشت:

$$\delta q = udy - vdx$$

و یا بر حسب تابع جریان:

$$\delta q = \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta x = \delta \psi \quad (2-18)$$

پس:

$$\delta q = \delta \psi$$

بنابراین نرخ جریان حجمی q در واحد عمق بین دو خط جریان ψ_1 و ψ_2 را با انتگرال گیری می توان به دست آورد:

$$q = \int \delta q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \delta \psi = \psi_2 - \psi_1 \quad (2-19)$$

اگر خط جریان بالایی مقدار ψ_2 بیشتر از ψ_1 باشد q مثبت است که مشخصه جریان از چپ به راست است. در غیر این صورت اگر $\psi_2 < \psi_1$ باشد جریان از راست به چپ می باشد.

در سیستم مختصات استوانه ای برای جریان دایمی غیر قابل تراکم دو بعدی در صفحه r, θ رابطه پیوستگی به صورت زیر است:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (2-20)$$

و مولفه های سرعت را می توان به صورت زیر به تابع جریان $\psi(r, \theta)$ مربوط کرد:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2-21)$$

و مثل قبل می توان دید در رابطه پیوستگی صدق می کند.

مفهوم تابع جریان را می توان به جریان متقارن محوری نیز تعمیم داد، مثل جریان در لوله و یا اطراف اجسام متقارن محوری^۱ و جریان های دو بعدی قابل تراکم؛ ولی روابط به صورت بالا نمی باشد. این مفهوم تابع جریان برای جریان های سه بعدی کاربرد ندارد و نمی توان تابع جریان را در آن جریانه ها به دست آورد (تابع جریان فقط برای جریانه های دو بعدی موجود است).

مثال ۲-۱) مولفه های سرعت در یک جریان دو بعدی غیر قابل تراکم دائمی در میدان جریان، $u = 2y$ و $v = 4x$ است. تابع جریان این جریان را پیدا کنید و چند خط جریان ψ را رسم کنید. جهت جریان را نیز مشخص کنید.

حل - از تعریف تابع جریان:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2y$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 4x$$

با انتگرال گیری از روابط بالا داریم:

$$\psi = y^2 + f_1(x)$$

$$\psi = -2x^2 + f_2(y)$$

و از دو رابطه فوق می توان دید برای اینکه هر دو رابطه همزمان صادق باشد باید $\psi = -2x^2 + y^2 + c$ باشد که c یک ثابت است. چون مقدار ثابت ψ اهمیت ندارد و تغییرات ψ با مقدار دبی جریان بین خطوط جریان بستگی دارد برای سادگی معمولاً $c = 0$ گرفته می شود و در این مثال اگر فرض کنیم که $\psi = 0$ از مبدا مختصات بگذرد، پس $\psi = -2x^2 + y^2$ و خط جریان $\psi = 0$ به صورت زیر می باشد:

$$y = \pm \sqrt{2x^2} = \pm \sqrt{2} x \quad \text{یا} \quad -2x^2 + y^2 = 0$$

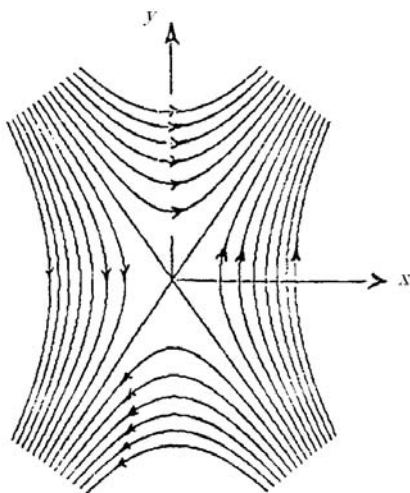
و خطوط جریان دیگر را می توان با قرار دادن ثابت های مختلف به دست آورد. از رابطه تابع جریان به جز وقتی که برابر صفر باشد می توان دید $\frac{y^2}{\psi} - \frac{x^2}{\psi/2} = 1$ که معادله هذلولی است. پس خطوط جریان دسته هذلولی هایی هستند که $\psi = 0$ مجانب آنها می باشد. تعدادی از خطوط جریان در شکل (۲-۴) نشان داده شده اند.

چون x و y هر نقطه ای قابل محاسبه می باشند و می دانیم: $v = 4x$ ؛ پس:

¹ Bodies of revolution

$$x > 0 \rightarrow v > 0$$

$$x < 0 \rightarrow v < 0$$



شکل ۲-۴: خطوط جریان مربوط به مثال ۳-۱

و همین طور چون $u = 2y$ ؛ پس:

$$y > 0 \rightarrow u > 0$$

$$y < 0 \rightarrow u < 0$$

بنابراین می توان در هر منطقه جهت جریان را مشخص کرد، جهت جریان در شکل (۲-۴) مشخص شده است.

۲-۳- قانون بقای اندازه حرکت خطی (معادله کوشی)

برای به دست آوردن رابطه دیفرانسیلی اندازه حرکت خطی می توان قانون دوم نیوتن را برای یک المان جرم δm با ابعاد کوچک به کار برد و یا رابطه را که به صورت انتگرالی است برای المان حجم کنترل نوشت که نتیجه در هر دو حالت یکی است:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \nabla \tau_{ij} \quad (2-22)$$

در این رابطه $\vec{g} = -\nabla(gh)$ که h جهت قائم است:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2-23)$$

τ_{ij} در روابط فوق، در حالت $i \neq j$ تنش برشی و در حالت $i = j$ تنش عمودی است.

۲-۳-۱- جریان غیر لزج، جریان غیر چرخشی

تنش برشی در جریان سیال به علت لزجت است و ما می دانیم که در بعضی از سیالات معمولی مثل آب و هوا، لزجت کم است و تحت شرایطی با دلایل خوب می توان از اثرات لزجت در جریان این سیالات صرف نظر کرد و در نتیجه تنش های برشی را نادیده گرفت.

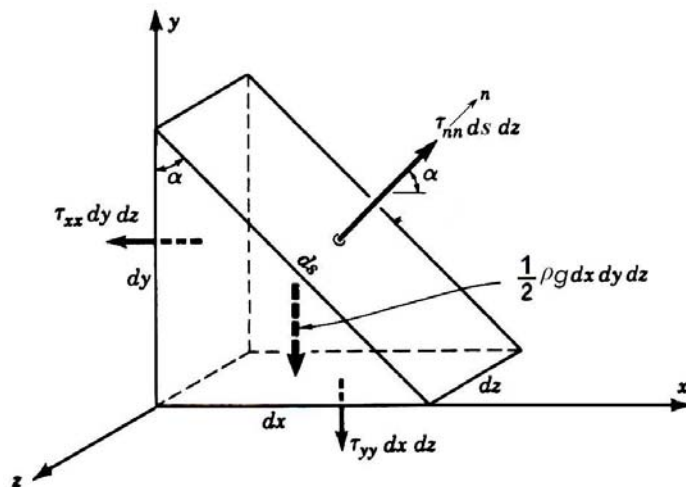
میدان جریانی که در آن از تنش برشی بتوان صرف نظر کرد، را غیر لزج^۱ و یا بدون اصطکاک^۲ گویند، در این میدان، تنش برشی صفر بوده و فقط مولفه های عمودی تنش عمل کرده و این تنش ها نیز در همه جهات برابرند. برای اثبات این مطلب، در جریان غیر لزج، المانی مطابق شکل (۲-۵) انتخاب می کنیم و رابطه قانون دوم نیوتن را برای آن به کار می بریم. المان منشوری شکل به ابعاد جزء dx ، dy و dz می باشد که جهت y را قائم به طرف بالا انتخاب کرده ایم. برای المان، رابطه قانون نیوتن را در جهت x و y می نویسیم:

$$\sum F_x = \delta m \bar{a}_x$$

$$\sum F_y = \delta m \bar{a}_y$$

مثلا در جهت y داریم:

$$(-1/2 \rho g) dx dy dz - \tau_{yy} dx dz + \tau_{nn} ds dz \sin \alpha = 1/2 \rho dx dy dz \vec{a}_y \quad (2-24)$$



شکل ۲-۵: یک المان در جریان غیر لزج

وقتی ابعاد المان به صفر میل می کند ترم های حاصلضرب شامل اجزاء بسیار کوچک dx ، dy و dz نسبت به ترم های حاصلضرب دو جزء بسیار کوچک اند و از آنها می توان نسبت به ترم های دیگر صرف نظر کرد:

$$-\tau_{yy} dx dz + \tau_{nn} ds dz \sin \alpha = 0 \Rightarrow \tau_{yy} dz dx = \tau_{nn} dz dx \quad (2-25)$$

¹ Non viscous

² Frictionless

و در نتیجه:

$$\tau_{nn} = \tau_{yy}$$

جهت n اختیاری است و به طور کلی با انتخاب منشور مناسب در همه جهات می توان نشان داد که:

$$\tau_{nn} = \tau_{yy} = \tau_{xx} = \tau_{zz} \quad (۲۶-۲)$$

پس در جریان سیالی که از اثرات لزجت بتوان صرف نظر کرد و تنش های برشی را صفر گرفت، مثل جریان غیر لزج و یا شرایط هیدرواستاتیک و یا حرکت سیال به صورت یک جسم صلب که لایه های سیال نسبت به هم حرکتی ندارند، تنش عمودی در همه جهات یکسان است. چون تنش نرمال در جهت عمود بر صفحه به صورت کششی است می توان گفت تنش عمودی در جریان غیر لزج از هر جهت یکسان بوده و برابر منفی فشار می باشد. $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$ که همان فشار هیدرواستاتیک بوده و معادل فشار ترمودینامیکی می باشد.

۲-۳-۲- معادلات اوایلر

برای جریان غیر لزج که تمام تنش های برشی صفر می باشد، تنش های عمودی را می توان با منفی فشار جایگزین کرد، رابطه کلی حرکت به شکل زیر در می آید:

در جهت X :

$$\rho g_x - \partial P / \partial x = \rho du / dt \quad (۲۷-۲)$$

در جهت Y :

$$\rho g_y - \partial P / \partial y = \rho dv / dt \quad (۲۸-۲)$$

در جهت Z :

$$\rho g_z - \partial P / \partial z = \rho dw / dt \quad (۲۹-۲)$$

این معادلات به معادلات حرکت اوایلر معروفند. روابط فوق را می توان به صورت برداری نیز نشان داد:

$$\rho \vec{g} - \nabla P = \rho \left[\partial \vec{V} / \partial t + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] \quad (۳۰-۲)$$

با وجود اینکه روابط اوایلر بسیار ساده تر از معادلات کلی حرکت می باشند و با رابطه پیوستگی چهار معادله تشکیل می دهند، هنوز به طور کلی نمی توان حل دقیقی برای آنها پیدا کرد و فشار و سرعت را در جریان سیال غیر لزج به دست آورد. مشکل اصلی ناشی از غیر خطی بودن ترم های شتاب جابجایی است. اگر چه تحت شرایط خاصی می توان اطلاعات قابل استفاده ای از این روابط گرفت.

۲-۳-۳- رابطه برنولی در میدان جریان غیر چرخشی

رابطه اویلر برای جریان دائمی^۱ به صورت $\rho \vec{g} - \nabla P = \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ است. محور قائم را h انتخاب می کنیم؛ پس $\vec{g} = -g \nabla h$ که g مقدار بردار شتاب ثقل می باشد. و ضمناً با استفاده از روابط برداری داریم:

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = 1/2 \nabla (\vec{V} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) \quad (۲-۳۱)$$

بنابراین می توان رابطه اویلر برای جریان دائمی را به صورت زیر نوشت:

$$(-\rho g \nabla h) - \nabla P = \frac{\rho}{2} \nabla (\vec{V} \cdot \vec{V}) - \rho (\vec{V} \times \nabla \times \vec{V}) \quad (۲-۳۲)$$

از قبل دیدیم که $\zeta = \nabla \times \vec{V}$ ورتیسیته می باشد و دو برابر چرخش المان سیال می باشد. در میدان جریان غیر چرخشی ورتیسیته صفر است، $\nabla \times \vec{V} = 0$. پس در جریان غیر چرخشی رابطه قبل به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{2} \nabla (V^2) + g \nabla h = 0 \quad (۲-۳۳)$$

و در امتداد هر جهت داریم:

$$\frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} dV^2 + g dh = 0 \quad (۲-۳۴)$$

یعنی مشتق تابعی از مکان نیست. می توان از رابطه فوق انتگرال گرفت:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gh = f(t) \quad (۲-۳۵)$$

در حالت کلی P, V تابعی از زمان است و در حالت دائمی که P, V ثابت است، مقدار

$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gh$ نیز ثابت خواهد بود. این مقدار ثابت در تمام میدان جریان غیر چرخشی یکی است و

برای جریان سیال غیر قابل تراکم داریم:

$$P + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho gh = cte \quad (۲-۳۶)$$

رابطه برنولی بین هر دو نقطه در میدان جریان غیر چرخشی صادق است. در رابطه قبل شرایط غیر لزج، دائمی و غیر قابل تراکم و غیر چرخشی بودن در جریان سیال وجود دارد. البته در جریان غیر چرخشی (خارج از لایه مرزی) می توان از اثرات لزجت صرف نظر کرد و تمام میدان جریان را غیر

¹ Steady

چرخشی در نظر گرفت. در روی خط جریان فقط در جریان غیر لزج، می توان از رابطه برنولی استفاده کرد.

۲-۴- مفهوم فیزیکی جریان غیر چرخشی

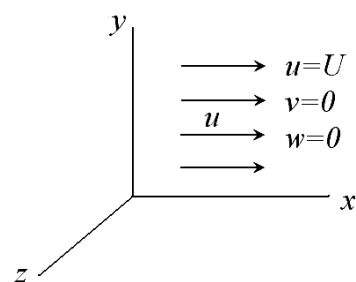
مفهوم غیر چرخشی بودن میدان جریان ممکن است به نظر عجیب بیاید. مولفه های چرخشی حول محورها های x, y, z برای جریان غیر چرخشی باید صفر باشد، مثلاً حول محور z

$$\omega_z = 1/2(\partial v / \partial x - \partial u / \partial y) = 0$$

در حالت کلی این بدین معنی است که روابط خاصی بین گرادیان مولفه های سرعت در جهات مختلف برقرار است.:

$$\partial u / \partial y = \partial v / \partial x \quad , \quad \partial w / \partial y = \partial v / \partial z \quad , \quad \partial w / \partial x = \partial u / \partial z \quad (۲-۳۷)$$

در یک حالت کلی جریان شرایط فوق برقرار نخواهد بود ولی در جریان های خاصی مثلاً جریان یکنواخت شکل (۲-۶) این شرایط برقرار است. چون $u = U$ ثابت است پس $v = 0$, $w = 0$ است؛ و شرایط غیر چرخشی در این جریان صادق است.

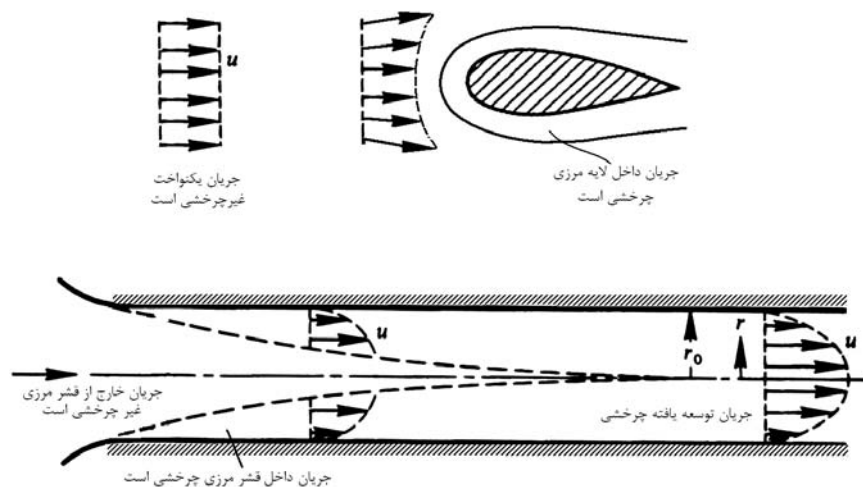


شکل ۲-۶: جریان یکنواخت در صفحه $x-y$

جریان یکنواخت به خودی خود جریان مهم و جالبی نیست، ولی در اکثر موارد جریان در ابتدا یکنواخت می باشد؛ مثل جریان اطراف اجسام و یا جریان ورودی به داخل یک کانال یا لوله یا ورودی مجرا. برای جریان غیر لزج، تنش برشی وجود ندارد و تنها نیروی موثر، نیروی ثقل و فشار است. چون وزن بر مرکز ثقل المان نیرو وارد می کند و نیروی فشار بر سطح المان عمود است هیچ کدام نمی توانند باعث چرخش المان شوند.

در سیال غیر لزج، دور از جدار، خارج از لایه مرزی و خارج از منطقه برخاستگی - که به علت جدایی ایجاد می شود- اثرات لزجت ناچیز و قابل اغماض است. اگر جریان در ابتدا غیر چرخشی باشد، نیرویی که باعث چرخش شود وجود ندارد و جریان غیر چرخشی باقی می ماند. مثلاً مطابق

شکل (۷-۲) در جریان اطراف اجسام، جریان به جز در قسمت لایه مرزی و برخاستگی، غیر چرخشی است و در میانه ابتدای مجرا هم جریان غیر چرخشی است. البته در طول لوله قشر مرزی ضخیم شده و تمام لوله را فرا می گیرد (جریان توسعه یافته) و در این قسمت دیگر در تمامی مجرا جریان کم و بیش چرخشی است. پس در جریان حقیقی محدوده هایی هستند که می توان سیال را غیر لزج و جریان را غیر چرخشی فرض کرد و با بسط و بررسی روابط در ناحیه جریان غیر لزج و غیر چرخشی می توان بعضی از مسائل عملی را حل کرد. البته با در نظر گرفتن این محدودیت، کاربرد این روابط در جاهایی که فرض فوق دیگر صادق نیست امکان پذیر نمی باشد.



شکل ۷-۲: نمونه هایی از شکل نواحی جریان

دیدیم که در جریان غیر چرخشی روابط برنولی در تمام میدان صادق است. ضمناً بررسی کردیم که در جریان دو بعدی روی صفحه می توان تابع جریان داشت و با استفاده از خواص تابع جریان می توان شکل جریان را معجم کرد، سرعت را در هر نقطه به دست آورد و اگر جریان غیر چرخشی باشد با استفاده از رابطه برنولی می توان فشار را هم در تمام نقاط به دست آورد. در جریان غیر چرخشی دو بعدی روی صفحه $x-y$ چرخش و ورتیسیته حول محور z صفر است.

$$2\omega_z = \xi_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (۳۸-۲)$$

و براساس تعریف تابع جریان:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (۳۹-۲)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (۴۰-۲)$$

در نتیجه با جایگذاری داریم:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (۲-۴۱)$$

یا:

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (۲-۴۲)$$

که نشان می دهد در جریان غیر چرخشی تابع جریان حل معادله لاپلاس است و این اساس روش های تحلیلی برای به دست آوردن تابع جریان های مختلف برای شرایط مرزی مختلف می باشد.

۲-۵- تابع پتانسیل سرعت

همان طور که رابطه پیوستگی منجر به تعریف تابع جریان شد که در شرط پیوستگی صدق می کند، در جریان غیر چرخشی، شرایط غیر چرخشی نیز منجر به بیان تابع دیگری به نام تابع پتانسیل سرعت می شود. برای جریان غیر چرخشی که $\zeta = 0$ می باشد داریم:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \quad (۲-۴۳)$$

بنابراین:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (۲-۴۴)$$

این روابط شرط لازم و کافی است برای این که مقدار $V = \nabla \phi$ بردار سرعت دیفرانسیل کلی تابع اسکالری مانند ϕ باشد، که $\phi = f(x, y, z)$ تابعی از x, y, z است. از تعریف تابع ϕ داریم:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{و} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{و} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (۲-۴۵)$$

تابع ϕ را تابع پتانسیل سرعت می نامند و جریان غیر چرخشی را می توان با داشتن این تابع بررسی کرد، در نتیجه این جریان غیر چرخشی را جریان پتانسیل می گویند. به صورت برداری می توان دید که بردار سرعت گرادیان تابع پتانسیل است. برای جریان غیر قابل تراکم از رابطه پیوستگی داریم $\nabla \cdot V = 0$ و یا در سیستم مختصات کارترین $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ، که از آن نتیجه می شود که

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

این معادله دیفرانسیل، معادله لاپلاس است و برای جریان غیر چرخشی غیر قابل تراکم صادق است. برای هر مسئله باید معادلات لاپلاس برای شرایط مرزی خاص آن مسئله حل شود تا تابع پتانسیل ϕ به دست آید و به کمک آن فشار در تمام نقاط الگوی جریان را می توان

با یک تابع به جای داشتن سه تابع u ، v و w تشریح کرد. در بعضی مسائل لازم می شود تابع پتانسیل در سیستم مختصات استوانه ای بیان شود:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (۲-۴۶)$$

به طور خلاصه می توان تابع پتانسیل را بدین صورت تعریف کرد که، تابعی است که گرادیان آن در هر جهت مولفه سرعت در آن جهت را مشخص می کند.

$$v_s = \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (۲-۴۷)$$

معادله لاپلاس در سیستم مختصات استوانه ای دو بعدی و سه بعدی به ترتیب، به صورت های زیر می باشد:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (۲-۴۸)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (۲-۴۹)$$

دیدیم که از شرایط غیر چرخشی نتیجه می شود $\nabla^2 \phi = 0$ ، که ϕ تابع اسکالر پتانسیل سرعت و رابطه فوق معادله لاپلاس می باشد. ویژگی معادله لاپلاس این است که این معادله دیفرانسیل، خطی می باشد و حل های مختلف را می توان جمع کرد (روش بر هم نهش) و حل دیگری را به دست آورد و برای جریان غیر چرخشی با داشتن چند ψ می توان ψ جدید به دست آورد.

$$\nabla^2 \phi_2 = 0, \nabla^2 \phi_1 = 0 \Rightarrow \nabla^2 (\phi_1 + \phi_2) = 0$$

که با تعریف $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$ ، نتیجه می شود: $\nabla^2 \phi_3 = 0$

با این روش با داشتن جواب چند حالت ساده می توان تابع پتانسیل حالت های پیچیده تر را به دست آورد. ضمناً یادآور می شویم که تابع جریان برای جریان دو بعدی است ولی تابع پتانسیل برای جریان سه بعدی غیر چرخشی هم وجود دارد. در ادامه بحث بیشتر جریان دو بعدی روی صفحه را در نظر می گیریم.

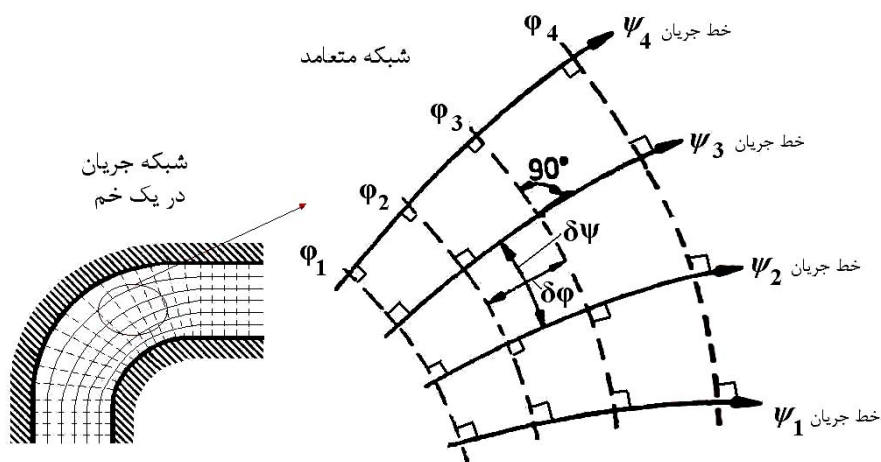
برای جریان دو بعدی غیر چرخشی روی صفحه $x-y$ ، $\{\phi = \phi(x, y)\}$:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \quad (۲-۵۰)$$

پس:

$$d\phi = u dx + v dy \quad (۲-۵۱)$$

و در امتداد خط ϕ ثابت $d\phi = 0$ می باشد، یعنی $u dx + v dy = 0$ ؛ پس $\frac{dy}{dx} = \frac{-u}{v}$ است. بنابراین در هر نقطه ضریب زاویه خط ϕ ثابت منفی معکوس ضریب زاویه خط جریان ψ ثابت است. اگر یک سری خطوط جریان و خطوط پتانسیل را رسم کنیم، شبکه منحنی‌های عمود بر هم (متعامد)^۱ تشکیل می شود و برای هر جریان پتانسیل این شبکه جریان را می توان ترسیم کرد که در تجسم شکل جریان بسیار مفید است. نمونه ای از شبکه مذکور در شکل (۸-۲) نمایش داده شده است.



شکل ۸-۲: نمونه ای از ترسیم خطوط جریان و خطوط هم پتانسیل

ضمناً با این خاصیت می توان از روش ترسیمی، خطوط جریان و خطوط پتانسیل (شبکه جریان) را رسم کرد. با برابر گرفتن $\delta\psi$ ، $\delta\phi$ شبکه جریان پتانسیل، مطابق شکل تقریباً به صورت یک سری چهارگوشهای مربعی شکل در می آیند.

¹ Orthogonal

تمرین های فصل دوم

- ۱-۲- رابطه پیوستگی $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ در چه جریان و با چه مشخصاتی صادق است؟
- ۲-۲- چرا رابطه $\nabla \times V = 0$ در جریان حقیقی داخل لایه مرزی اطراف یک جسم و داخل منطقه برخاستگی صادق نیست؟
- ۳-۲- شرایط کاربرد معادله اوایلر در جریان سیال چیست؟ توضیح دهید.
- ۴-۲- توضیح دهید چگونه می توان به معادلات اوایلر و برنولی رسید؟
- ۵-۲- شرط نوع جریان و شرایط فیزیکی برای استفاده از معادله برنولی در میدان جریان را بنویسید.
- ۶-۲- چرا رابطه برنولی فقط در کل میدان جریان غیر چرخشی صادق است و داخل لایه مرزی صادق نیست؟
- ۷-۲- در کدام حالت زیر می توان از اثرات لزجت صرف نظر کرد و جریان را غیر چرخشی فرض کرد؟ در جریان لایه مرزی آرام (لایه ای) یا در جریان لایه مرزی مغشوش؟ چرا؟
- ۸-۲- آیا از رابطه برنولی روی خط جریان در لایه مرزی آرام (لایه ای) یا مغشوش می توان استفاده کرد؟ چرا؟
- ۹-۲- در عمل در چه جریانهایی و در چه قسمت از جریان، می توان آنرا غیر چرخشی فرض کرد؟
- ۱۰-۲- آیا در جریان لایه مرزی آرام (لایه ای) می توان از اثرات لزجت صرف نظر کرد؟ چرا؟
- ۱۱-۲- توضیح دهید که فرق اصلی تابع جریان و تابع پتانسیل چیست؟

۱۲-۲- نشان دهید تابع جریان $\psi = 2xy$ می تواند مشخصه جریان غیر چرخشی در زاویه قائمه باشد.

۱۳-۲- نشان دهید تابع جریان $\psi = Ur \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta$ می تواند مشخصه جریان غیر چرخشی

اطراف یک استوانه به شعاع a باشد. تابع پتانسیل و نقاط سکون را بدست آورید.

۱۴-۲- در جریان غیر چرخشی آب با دمای $15^\circ C$ اطراف استوانه، اگر سرعت و فشار در

فاصله بینهایت دور از جسم به ترتیب $20 \frac{m}{s}$ و فشار اتمسفر باشند، آیا در نقطه ای که

سرعت به بیشترین مقدار خود می رسد، امکان تبخیر (کاویتاسیون) وجود دارد؟

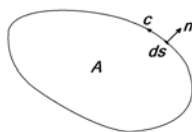
۱۵-۲- اگر در جریانی $\nabla^2 \psi = 0$ و $\nabla^2 \phi = 0$ باشد، آیا لزوماً جریان دو بعدی و غیر چرخشی

است یا تابع جریان و تابع پتانسیل متعامدند؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

۱۶-۲- نقاط منفرد و سکون را در جریانی با تابع جریان $\psi = ax^2 - ay^2$ بیابید.

۱۷-۲- یک رابطه ریاضی که در مکانیک سیالات استفاده می شود، قضیه استوکس است:

$$\oint_c V ds = \iint_A (\nabla \times V) \cdot n dA$$



شکل ۹-۲: مربوط به تمرین ۱۷-۲

که در آن A یک سطح دلخواه و c مرز یا منحنی است که این سطح را در بر می گیرد. بردار

ds دیفرانسیل طول منحنی در طول c و n بردار یکه عمود (نرمال) رو به خارج است. این

رابطه را برای جریان غیر چرخشی ساده کنید و بیان کنید که انتگرال خطی حاصل چگونه به

پتانسیل سرعت مربوط می شود؟

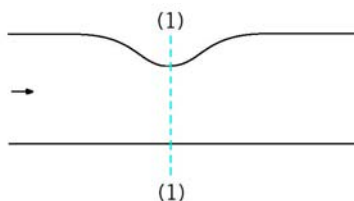
۱۸-۲- محدوده ای از جریان اطراف اجسام که اثرات لزجت در آن محدوده قابل ملاحظه است

چه نام دارد؟ سرعت جریان در این محدوده، در مقایسه با سرعت اصلی جریان چگونه

است؟

۱۹-۲- در شکل زیر توزیع سرعت را برای دو حالت جریان سیال ایده آل و حقیقی مغشوش

در مقطع (1)-(1) رسم کنید.

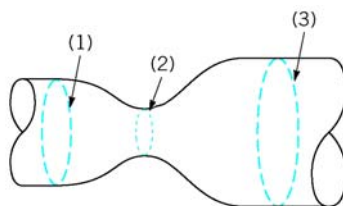


شکل ۱۰-۲: مربوط به تمرین ۱۹-۲

۲۰-۲- در مجرای زیر با فرض عبور جریان هوا از چپ به راست، در کدام قسمت جریان می

توان جریان سیال را ایده آل و غیر چرخشی فرض کرد و در کدام قسمت نمی توان؟

چرا؟



شکل ۱۱-۲: مجرای مربوط به تمرین ۲۰-۲

همچنین با استدلال بیان کنید فشار در چه نقطه ای مینیمم است؟

فصل سوم

جریان سیال ایده آل

۳-۱- مقدمه

در فصل قبل مروری بر معادله حرکت ذرات سیال (معادلات مقدار حرکت) برای یک سیال حقیقی انجام گردید. مشاهده شد که این معادلات، غیر خطی است و تعداد معادلات، کمتر از تعداد مجهولها می باشد.

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (۳-۱)$$

با فرض این که سیال نیوتنی باشد، یعنی تنش ها رابطه خطی با نرخ کرنش داشته باشند، این معادله ساده شده و برای سیالی با لزجت μ و دانسیته ρ ، معادله ناویر-استوکس به دست می آید. با این که معادله ناویر-استوکس نسبت به معادله (۳-۱) ساده تر است، اما همچنان در آن ترم های غیر خطی وجود داشته و حل آن در حالت کلی امکان پذیر نیست. مشاهده شد که فرم ساده تر معادله حرکت، معادله اولر است. معادله اولر با فرض غیر لزج بودن سیال (سیال ایده آل) به دست می آید. اکنون این پرسش مطرح می شود که گرچه رفتار سیالات حقیقی همراه با لزجت است، تجزیه و تحلیل سیال ایده آل به چه دلیل صورت می گیرد؟ از دو جنبه می توان به این سوال پاسخ داد.

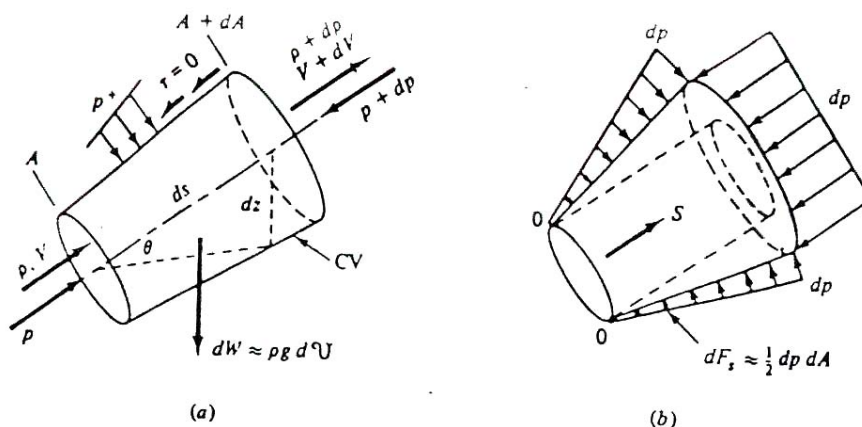
از نظر فیزیک مسائل سیالات، نواحی بسیاری وجود دارد که سیال رفتار غیر لزج داشته و لزجت اثر چندانی ندارد. این موضوع در جریان اطراف اجسام، کاملاً مشهود است. از جنبه حل ریاضی مسائل نیز، فرض ایده آل بودن سیال کمک می کند معادلات ساده تر شوند. حتی در پاره ای موارد بعضی نتایج حل سیال ایده آل را می توان به سیال حقیقی تعمیم داد که در آینده و در مباحث سیال حقیقی نشان داده خواهد شد.

۳-۲- معادله اولر در سیستم مختصات خط جریانی

معادله اولر قبلاً معرفی شده است. دیده شد اگر در معادله انتقال مومنتوم - معادله (۳-۱) سیال ایده آل فرض شود، ترم لزجت و تنش برشی، حذف شده و معادله به صورت زیر در می آید:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p \quad (۳-۲)$$

شبهه همین معادله را می توان با انتخاب دستگاه مختصات خط جریانی نشان داد. در فصل دوم مفهوم خط جریان و روابط آن مشخص شد. خط جریان خطی است که بردار سرعت در هر نقطه بر آن مماس باشد. اگر جریان دائم باشد، ذرات سیال در امتداد خط جریان حرکت کرده و در این جریان، خطوط رگه، مسیر و جریان بر هم منطبق هستند. بنابراین خط جریان، یک مسیر منطقی است که می توان معادلات حرکت را در امتداد آن نوشت. در اینجا خط جریان به عنوان محور مختصات انتخاب شده و یک المان لوله جریان به عنوان شکل المان سیال به طول ds فرض می شود.



شکل ۳-۱: یک المان سیال در مسیر خط جریان

شکل (۱-۳) المان سیال را در مسیر خط جریان نشان می دهد. با نوشتن تغییرات مومنوم روی خط جریان با شرایط جریان دائم و سیال غیر قابل تراکم، رابطه ای بین سرعت، فشار و ارتفاع در طول خط جریان به دست می آید. سطح مقطع المان در نظر گرفته شده، به قدر کافی کوچک است که می توان سرعت را در هر سطح مقطع (در تمام سطح) یکسان فرض کرد $V = \frac{\delta q}{\delta A}$ و جریان را یک بعدی گرفت. از قانون دوم نیوتن در بخش ۱-۷ دیدیم که در جریان سیال غیر لزج روی خط جریان، می توان رابطه برنولی را نوشت.

۳-۳- جریان دو بعدی غیر چرخشی

برای اینکه الگوی جریان غیر چرخشی را مشخص کنیم لازم است φ, ψ را که در شرایط مرزی مسئله صدق می کنند پیدا کنیم. حل ریاضی الگوهای نسبتاً ساده جریان، موجود است. روش های تقریبی دیگری وجود دارد که برای هر نوع شرایط مرزی، الگوی جریان را مشخص می کند و عمومی نیست در ضمن حل خاص مسئله تقریبی است ولی می توان به دلخواه، تقریب را کم نمود. بعضی از روش های تقریبی عبارت اند از روش ترسیمی، آنالیز عددی، و ساختن مدل تجربی.

۳-۳-۱- روش ترسیمی شبکه جریان

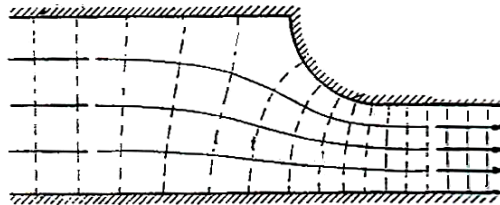
همان طور که پیشتر شرح داده شد شبکه جریان از یک سری خطوط جریان و خطوط هم پتانسیل که نماینده الگوی جریان غیر چرخشی است تشکیل شده است. در هر نقطه اگر $\delta\psi = \delta\varphi$ باشد:

$$V = \frac{\delta q}{\delta n} = \frac{\delta\psi}{\delta n} = \frac{\delta\varphi}{\delta s} \quad (3-3)$$

پس وقتی مقادیر $\delta\varphi, \delta\psi$ را برابر مقدار ثابت یکسانی قرار دهیم، در نتیجه فواصل بین خطوط هم پتانسیل و خطوط جریان در هر نقطه برابر خواهند بود. چون خطوط جریان بر خطوط هم پتانسیل عمودند شبکه جریان تقریباً از یک سری مربعاتی تشکیل می شود که با خواص ذکر شده می توان شبکه جریان را با روش آزمون و خطا ترسیم نمود. بدین روش با وجود اینکه اشخاص مختلف با طرق مختلفی شبکه جریان را رسم می کنند و تعداد خطوط جریانی را که انتخاب می کنند متفاوت است، ولی نتیجه عمل افراد مختلف خیلی به هم نزدیک است.

برای ترسیم شبکه جریان با این روش، به طریق زیر می توان عمل نمود:

- ۱- تصمیم بگیرید برای دقت لازم چند خط جریان باید ترسیم شود. ابتدا در قسمت هایی که توزیع سرعت مشخص است مثل قسمت جریان موازی، خطوط جریان را رسم کنید.
 - ۲- قسمت های دیگر خطوط جریان را به وسیله منحنی های غیر شکسته کامل نمائید، به طوری که فاصله بین خطوط جریان با دور شدن از مرکز انحنا افزایش یابند.
 - ۳- سپس خطوط پتانسیل را نقطه چین طوری رسم کنید که خطوط جریان را که شامل مرزها نیز می شود، به طور عمود قطع کنند و چهار ضلعی ها تقریباً مربع باشند. در نزدیکی نقطه سکون به جای چهار ضلعی پنج ضلعی خواهیم داشت و این به علت این است که نمی توانیم مربعات را بی نهایت کوچک رسم کنیم. بهتر است اولین خطوط پتانسیل را از دو طرف نقطه سکون با فواصل مساوی از آن نقطه رسم کنیم. گاه لازم است که تغییراتی در خطوط پتانسیل و در قسمت هایی از خطوط جریان داده شود تا در شرایط ذکر شده صدق کند. برای امتحان درست بودن خطوط رسم شده، می توان قطرهای مربعات را رسم کرد. این اقطار نیز می بایست شبکه منحنی هائی را تشکیل بدهند که در محل های تقاطع بر هم عمودند.
- نمونه ای از این مراحل در شکل (۲-۳) نشان داده شده است.



شکل ۲-۳: رسم شبکه جریان با روش ترسیمی

- ۴- در برخی موارد لازم است که سطح آزاد جریان را به وسیله آزمایش مشخص نمود، مثلاً در جریان از روی سر ریز لب تیز، مطابق شکل (۳-۳) باید سطح آزاد مطابق با شرایط مرزی باشد. وقتی جریان تحت تاثیر نیروی ثقل نباشد، فواصل خطوط پتانسیل و جریان در امتداد سطح آزاد افقی، به گونه ای است که مربعات کامل تشکیل می شوند، چون که در سطح، فشار ثابت است و همه جا سرعت در این مقاطع، یکسان است. در قسمت نزدیک سرریز و بعد از آن که خطوط جریان انحنا دارند سرعت در همه جا یکسان نیست. برای جریان از روی سرریزی که کاملاً تحت تاثیر نیروی ثقل است با استفاده از رابطه برنولی می توان فواصل بین خطوط پتانسیل را حدس زد، به طوری که در هر نقطه روی سطح آزاد رابطه زیر برقرار است.

$$V = \sqrt{2g h_v} = \frac{\delta\phi}{\delta s} \quad (۴-۳)$$

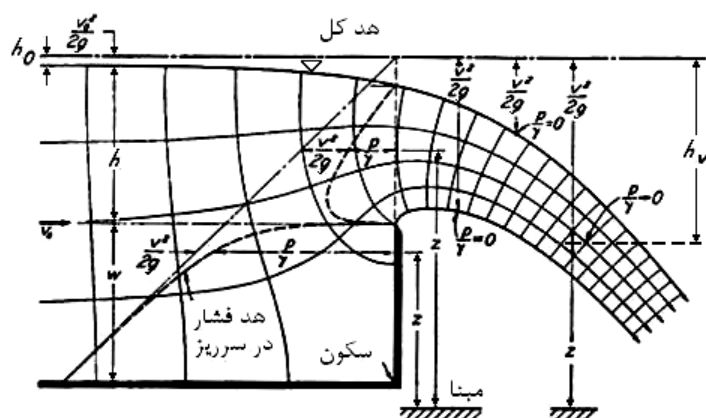
که h_v ارتفاع نظیر سرعت^۱ است.

پس:

$$\delta\phi = \sqrt{2g} \sqrt{h_v} \delta s$$

$$\phi_n - \phi_0 = \sqrt{2g} \sum_{i=0}^n \sqrt{h_{v_i}} \delta s_i \quad (۵-۳)$$

چون $\delta\phi$ ثابت اختیار شده $\sqrt{h_v} \delta s$ در تمام نقاط روی سطح آزاد باید ثابت باشد. تغییرات ϕ از هر نقطه ای روی سطح آزاد از رابطه بالا پیدا می شود.



شکل ۳-۳: جریان از روی سرریز لب تیز

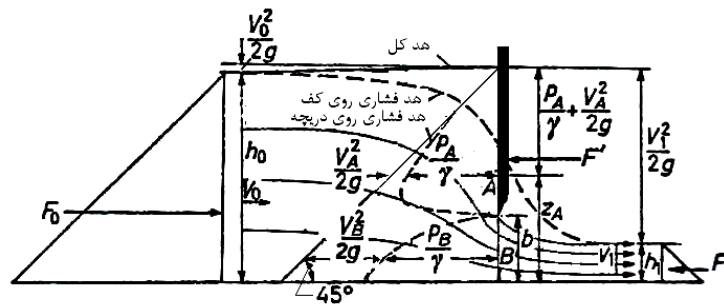
۵- توزیع فشار با استفاده از شبکه جریان و رابطه برنولی در جریان بدون تاثیر نیروی ثقل را می توان بر حسب $P - P_0$ یا به صورت بدون بعد $(P - P_0) / (\frac{1}{2} \rho V_0^2)$ رسم نمود. وقتی نیروی ثقل تاثیر گذار است و سطح آزاد داریم به جای توزیع فشار، بهتر است توزیع ارتفاع پیزومتری $h = \frac{P}{\gamma} + z$ یا بصورت بدون بعد $\frac{h - h_0}{V_0^2 / 2g}$ رسم شود و در حالت نبودن سطح آزاد، برای رسم در نقاط مختلف بهتر است.

۶- اگر به طور کلی سرعت جریان زیاد باشد، در محل هایی از جریان که سرعت کند شونده است - مثلاً در شکل (۳-۳) در کف نزدیک نقطه سکون- ممکن است جدائی سیال از جدار پدیدار شود. در این صورت شکل الگوی جریان در این قسمت، تحت تاثیر این جدائی از جدار، تغییر می کند.

¹ Velocity head

مثال ۱-۳

برای جریان دو بعدی دریچه نشان داده شده در شکل (۳-۴)، اگر $h_0 = 2.4m$ ، $b = 0.75m$ ، $h_1 = 0.45m$ باشد، توزیع فشار جریان روی دریچه را پیدا کنید و نیروی کل محاسبه شده از روی معادله مقدار حرکت را با آن مقایسه کنید. وزن مخصوص آب را $\gamma = 9800 \text{ N/m}^3$ فرض کنید.



شکل ۳-۴: مربوط به مثال ۱-۳

حل -

بعد از رسم شبکه با امتحان $\sqrt{h_v} \delta s$ ثابت و به صورت ترسیمی سعی و خطا می توان مسئله را حل نمود. با توجه به داده های روی شکل (۳-۴)

$$h_0 + V_0^2/2g = h_1 + V_1^2/2g \quad \text{رابطه برنولی:}$$

$$2.4 + V_0^2/(2 \times 9.81) = 0.45 + V_1^2/(2 \times 9.81) \quad (1)$$

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{h_0}{h_1} = \frac{2.4}{0.45} \quad (2) \quad \text{رابطه پیوستگی:}$$

از دو معادله (۱) و (۲) داریم:

$$V_1 = 6.29 \text{ m/s}$$

$$V_0 = 1.18 \text{ m/s}$$

$$H = h_0 + V_0^2/2g = h_1 + V_1^2/2g = 2.47 \text{ m}$$

دبی جریان برای واحد عرض:

$$q = V_0 h_0 = 1.18 \times 2.4 = 2.83 \text{ m}^2/\text{s}$$

با اندازه گیری مساحت زیر منحنی توزیع فشار برای نیرو در واحد عرض دریچه داریم:

$$F' = 13.11 \text{ kN}$$

انتظار این است که مقدار فوق، از F'' نیروی محاسبه شده برای واحد عرض دریچه در حالت هیدرواستاتیکی کمتر باشد:

$$F'' = \frac{\gamma(h_0 - b)}{2} \times (h_0 - b) = \frac{9800}{2} (2.4 - 0.75)^2 = 13.34 \text{ kN}$$

استفاده از رابطه ممنتوم (مقدار حرکت): طبق رابطه مقدار حرکت، تغییرات اندازه حرکت برابر جمع نیروهاست، با در نظر گرفتن نیروها بر واحد عرض دریچه، می توان نوشت:

$$\rho q(V_1 - V_0) = F_0 - F_1 - F'$$

و از این رابطه به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \rho q(V_1 - V_0) &= \gamma h_0 \frac{h_0}{2} - \gamma h_1 \frac{h_1}{2} - F' \\ \frac{9800}{9.81} \times 2.83(6.29 - 1.18) &= \frac{9800}{2} (2.4^2 - 0.45^2) - F' \\ F' &= 12.78 \text{ kN} \end{aligned}$$

۳-۳-۲- شبکه جریان برای نفوذ سیال در محیط متخلخل^۱

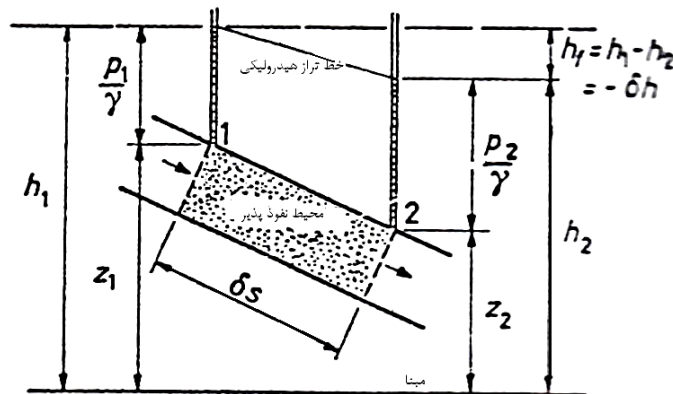
برای جریان دائمی با سرعت کم در محیط متخلخل طبق معادله دارسی مقدار جریانی که از سطح مقطع A می گذرد:

$$Q = -KA dh / ds$$

(۳-۶)

که سرعت متوسط جریان $V = -K dh / ds$ می باشد. طبق تجربه، فرمول بالا تا $Re = \frac{Vd}{\nu} = 1$

صادق است که V سرعت متوسط و d قطر متوسط ذرات ماسه است. $\frac{dh}{ds}$ گرادیان ارتفاع پیزومتري و K ضریب نفوذ محیط متخلخل است.



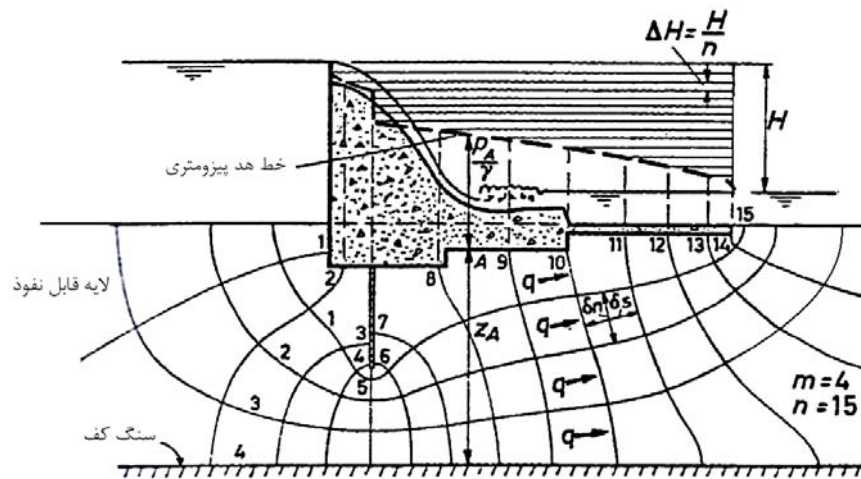
شکل ۳-۵: جریان در محیط متخلخل بر مبنای فرمول دارسی

¹ Seepage flow net in porous media

اگر تابع $\phi = -Kh$ در نظر گرفته شود، مقدار $V = -K dh/ds$ بوده و در نتیجه $V = \frac{d\phi}{ds}$ خواهد بود یعنی در شرط جریان پتانسیل صدق می کند. با وجود اینکه در منفذهای محیط متخلخل، جریان چرخشی است ولی می توان از متد شبکه جریان برای جریان کلی استفاده نمود، چون برای این جریان کلی تابع پتانسیل را می توان $\phi = -Kh$ تعریف نمود. خطوط ثابت پیزومتری خطوط هم پتانسیل خواهند بود.

۳-۲-۱- جریان در محیط محدود

برای نفوذ سیال در محیطی محدود به جدار غیر قابل نفوذ، شکل جریان فقط بستگی به شکل جدار دارد؛ به طور مثال در حالت نفوذ آب از زیر یک سد مطابق شکل (۳-۶) که لایه ای از شن و ماسه قابل نفوذ روی لایه غیر قابل نفوذ یا سنگ کف قرار گرفته باشد، اختلاف سطح آب بالا دست و پائین دست سد مقدار نفوذ آب زیر سد را مشخص می کند. چون $\delta\phi$ مقداری است ثابت، اختلاف ارتفاع سطح آب (اختلاف پتانسیل H) را به قسمتهای مساوی تقسیم کرده و اگر تعداد مربع ها در امتداد هر مجرا n باشد، افت پیزومتری بین هر دو خط پتانسیل $\delta\phi$ بوده و H را به m قسمت مساوی تقسیم می کند. در نتیجه در هر نقطه زیر سد ارتفاع پیزومتری $\frac{P}{\gamma}$ را می توان به دست آورد.



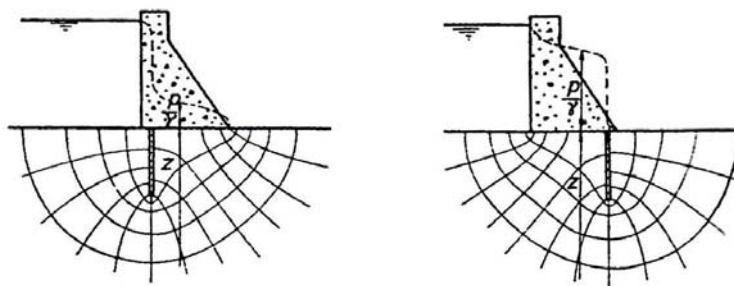
شکل ۳-۶: ترسیم خطوط جریان عبوری از زیر یک سد

دبی جریان در هر مجرا برای واحد عرض (q) از رابطه زیر به دست می آید:

$$q = -K dh/ds \quad (۷-۳)$$

$$q = K h/n \quad (۸-۳)$$

چون طول های δn و δs برابرند پس $Q = \frac{Km}{n}H$ است (که m تعداد مجرای می باشد). در رابطه بالا می بینیم که مقدار Q با ازدیاد n کم می شود. اگر افت پیرومتری زیاد باشد m زیاد بوده مقدار کمتری آب از زیر سد نفوذ می کند. اگر شکل جدار طوری باشد که مقدار m زیاد شود (مخصوصاً تعدادشان در امتداد طول افقی بیشتر شود) ارتفاع پیرومتری سریع کم می شود و در نتیجه مقدار فشار وارد به سد (به طرف بالا) کم خواهد شد. بنابراین طراحی محل دیواره غیر قابل نفوذ در سدها بسیار حائز اهمیت می باشد، به دو نمونه از محل این دیواره ها که در شکل (۷-۳) نشان داده شده توجه کنید. با ترسیم شبکه جریان می توان نیروی وارد به سد، توزیع این نیرو و بالاخره نقطه ای را که سرعت ماکزیمم است، بررسی نمود و سد را طوری طرح کرد که بتواند در مقابل عوامل مختلف پایدار باشد.



شکل ۷-۳: اثر محل دیواره غیرقابل نفوذ در نیروی فشار به طرف بالا

مثال (۲-۳)

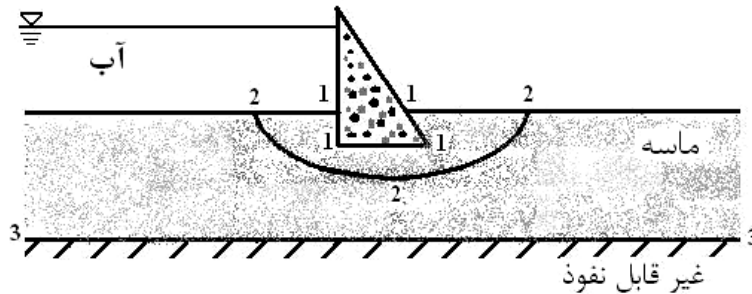
در حالت نفوذ آب از زیر یک سد مطابق شکل (۶-۳) اگر $H = 10m$ و $K = 0.6m/day$ باشد، مقدار نفوذ آب از زیر سد را محاسبه کنید.

حل -

$$Q = K \frac{m}{n} H = 0.6 \times \frac{4}{15} \times 10 = 1.6 \quad m^3/day/m$$

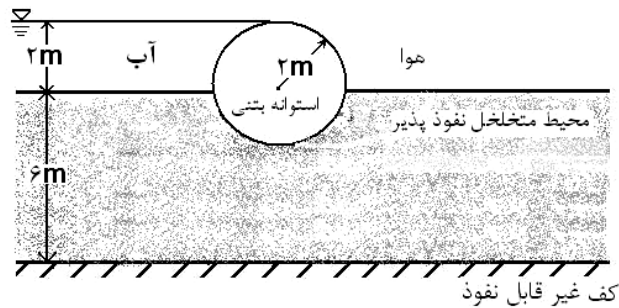
تمرین های فصل سوم

- ۳-۱- در مثال (۳-۲) تعداد مجراها را $m=5$ اختیار کرده و شبکه جریان را رسم نمایید. سپس دبی Q را محاسبه کنید و با مقدار محاسبه شده در مثال مقایسه نمایید.
- ۳-۲- در شکل زیر سه خط جریان ۱-۱، ۲-۲ و ۳-۳ رسم شده است. دو خط جریان دیگر بین این خطوط رسم کنید.



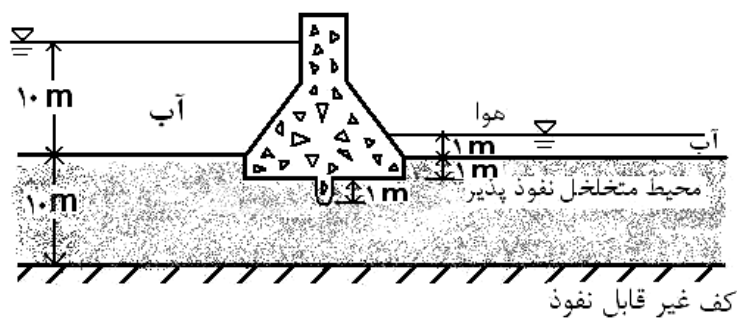
شکل ۳-۸: مربوط به تمرین ۳-۲

- ۳-۳- توضیح دهید برای به دست آوردن شکل خطوط جریان در جریان آب در محیط متخلخل شکل زیر چگونه می بایست اقدام کرد؟ چند خط جریان و پتانسیل را رسم کنید.



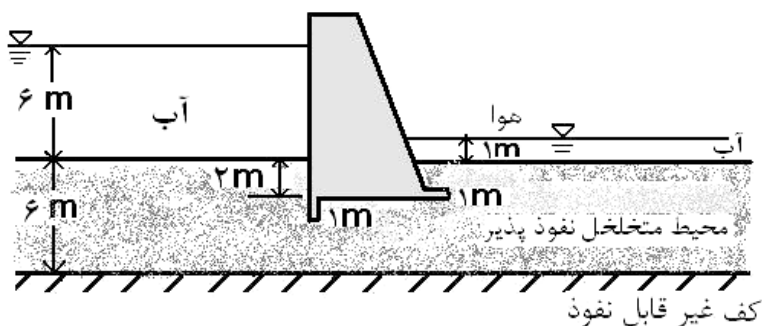
شکل ۳-۹: مربوط به تمرین ۳-۳

- ۳-۴- برای نفوذ جریان آب در محیط متخلخل اطراف سدّ شکل زیر با اختیار کردن $n=15$ ، $m=4$ خطوط جریان و پتانسیل را رسم کنید. سپس دبی نفوذی را محاسبه کنید.



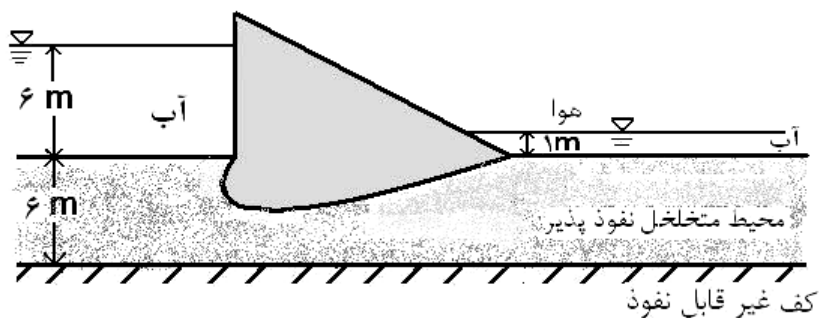
شکل ۳-۱۰: مربوط به تمرین ۳-۴

۳-۵- برای نفوذ آب در محیط متخلخل اطراف سد بتنی مطابق شکل زیر چند خط جریان و پتانسیل را رسم کنید. سپس یک منحنی تقریبی برای ارتفاع پیزومتری رسم نمایید.



شکل ۳-۱۱: مربوط به تمرین ۳-۵

۳-۶- در مسئله قبل اگر طرح سد بتنی مطابق شکل زیر تغییر نماید، خطوط جریان و پتانسیل را بگونه ای رسم کنید تا یک شبکه جریان تقریباً چهارضلعی و متعامد در محیط متخلخل ایجاد شود.



شکل ۳-۱۲: مربوط به تمرین ۳-۶

فصل چهارم

الگوهای ساده جریان در جریان سیال دو بعدی غیر چرخشی

۴-۱- جریان یکنواخت

ساده ترین جریانی که می تواند وجود داشته باشد جریانی است که خطوط جریان همگی مستقیم و موازی باشند و در ضمن اندازه سرعت نیز ثابت باشد؛ به این نوع جریان، جریان یکنواخت می گویند. با توجه به شکل (۴-۱) خواهیم داشت:

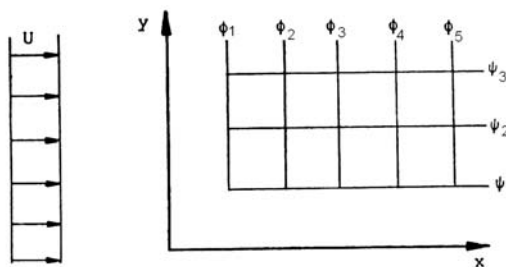
$$u = U, \quad v = 0$$

پس:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = U, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (4-1)$$

حال می توان از این معادلات انتگرال گرفت که در نتیجه، ثابت اختیاری انتگرال را که می توان برابر صفر قرار داد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\varphi = Ux = Ur \cos \theta \quad (۲-۴)$$



شکل ۱-۴: خطوط جریان یکنواخت

به روش مشابه می توان تابع جریان را به دست آورد:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (۳-۴)$$

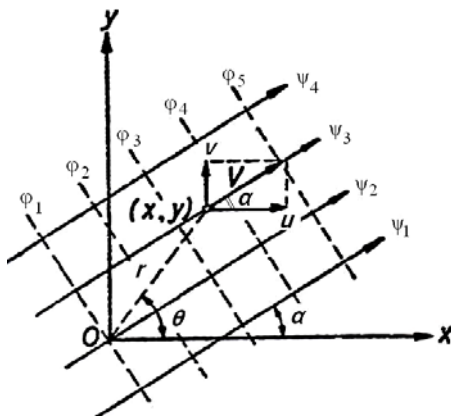
و بنابراین خواهیم داشت:

$$\psi = Uy = Ur \sin \theta \quad (۴-۴)$$

همین روش می تواند مطابق شکل (۲-۴) برای جریان یکنواختی که با محور x زاویه α می سازد، تعمیم داده شود:

$$\psi = Ur(\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha) = Ur \sin(\theta - \alpha) \quad (۵-۴)$$

$$\varphi = Ur(\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) = Ur \cos(\theta - \alpha) \quad (۶-۴)$$



شکل ۲-۴: خطوط جریان یکنواخت دارای زاویه در یک صفحه

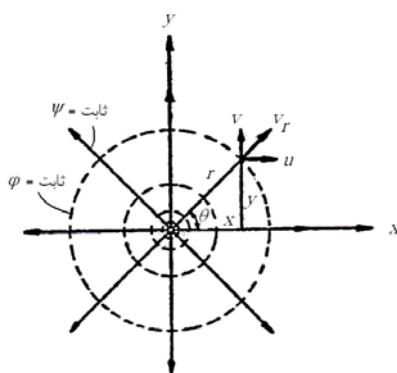
۲-۴- چشمه و چاه دو بعدی

اگر در جریان روی صفحه، جریان از نقطه ای به صورت شعاعی و متقارن خارج گردد، یک چشمه (خطی) خواهیم داشت، یعنی در حالت دو بعدی، یک خط - مانند محور استوانه - را چشمه خطی

می‌نامیم که این خط عمود بر صفحه می‌باشد و جریان به صورت شعاعی از محور استوانه از این خط پخش می‌گردد. در حالت چشمه سه بعدی، جریان از یک نقطه به صورت کروی پخش می‌شود. در چاه عکس این عمل انجام می‌شود. در اینجا قدرت چاه، همان جریان وارد شده است و آنرا به Q نشان می‌دهیم. در حالت چاه جریان به طرف یک نقطه است. در حالت چشمه، Q قدرت چشمه به طرف بیرون است. پس در چشمه و چاه دو بعدی:

$$V_r = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (۷-۴)$$

$$V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (۸-۴)$$



شکل ۴-۳: یک چشمه در مرکز مختصات

بنابراین:

$$(۹-۴)$$

$$\psi = \psi(\theta)$$

$$(۱۰-۴)$$

$$\phi = \phi(r)$$

اگر مقدار ثابت $\frac{Q}{2\pi}$ را برابر m بگیریم (که Q یا m را قدرت چشمه می‌نامند) داریم:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{m}{r} \quad (۱۱-۴)$$

و چون سرعت مماسی $V_\theta = 0$ مقدار $\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$ برابر با صفر بوده و چون $V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ ، پس خواهیم داشت:

$$\frac{d\psi}{d\theta} = m = \frac{Q}{2\pi} \quad (۱۲-۴)$$

و

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{m}{r} \quad (۱۳-۴)$$

پس:

$$\text{در چشمه:} \begin{cases} \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta = m\theta \\ \phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r = m \ln r \end{cases} \quad (۴-۱۴)$$

$$\text{در چاه:} \begin{cases} \psi = -\frac{Q}{2\pi} \theta = -m\theta \\ \phi = -\frac{Q}{2\pi} \ln r = -m \ln r \end{cases} \quad (۴-۱۵)$$

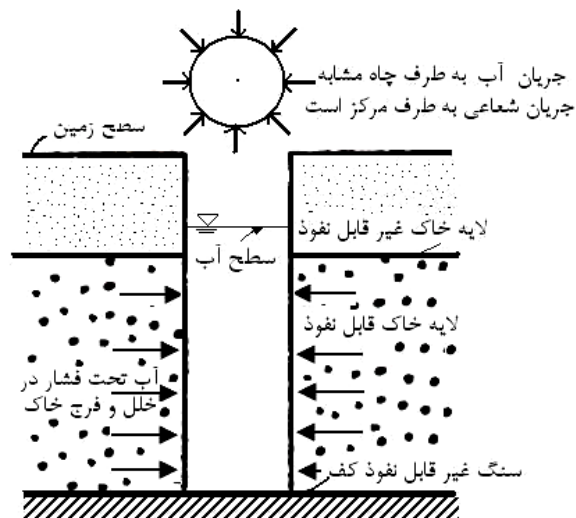
می توان معادلات بالا را در مختصات کارتزین چنین نوشت:

$$\text{برای چشمه:} \begin{cases} \psi = m \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ \phi = \frac{1}{2} m \ln(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (۴-۱۶)$$

$$\text{برای چاه:} \begin{cases} \psi = -m \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ \phi = -\frac{1}{2} m \ln(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (۴-۱۷)$$

توجه به این نکته حائز اهمیت است که در مبدا، مقدار سرعت باید بی نهایت گردد، که از نقطه نظر فیزیکی غیر ممکن است پس چشمه و چاه در حالت واقعی وجود ندارند، ولی می توان با تقریب، در خارج از این نقطه مسئله را حل کرد.

اگر بشقابی را به صورت افقی زیر شیر آب بگیریم، جریان ایجاد شده شبیه به جریان چشمه است. به عنوان یک مثال واقعی دیگر، شکل (۴-۴) جریان آب داخل خاک را نشان می دهد. در جریان آبهای زیرزمینی به سمت چاه عمیق، اگر فشار آب موجود در خلل و فرج خاک زیاد باشد، آب خود به خود بیرون می ریزد و چاه حفاری شده بوسیله آب پر می گردد.



شکل ۴-۴: جریان آب زیرزمینی به طرف یک چاه عمیق

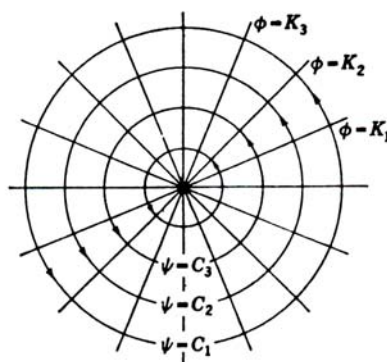
۴-۳- ورتکس آزاد یا ورتکس غیر چرخشی

جریانی که ذرات به صورت دایره وار مسیری را طی می کنند ورتکس^۱ (یا دایروی) می نامند. این ذره می تواند دور خودش هم بچرخد، پس با توجه به این مطلب دو نوع ورتکس (دایروی) داریم ورتکس چرخشی و غیر چرخشی. در ورتکس غیر چرخشی چرخش نداریم و می توان تابع پتانسیل را به دست آورد که در این حالت تابع جریان، مشابه تابع پتانسیل چشمه یا چاه است و تابع پتانسیل، معادل تابع جریان چشمه یا چاه است. در این روابط k قدرت ورتکس است:

$$V_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{d\theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{k}{r} \quad (۴-۱۸)$$

$$\begin{cases} \psi = \mp k \ln r = \mp k \ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \phi = \pm k \theta = \pm k \ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (۴-۱۹)$$

¹ Vortex



شکل ۴-۵: شمای ورتکس آزاد

شبکه جریان ورتکس با شبکه جریان چاه و چشمه یکسان است با این تفاوت که در این حالت دواير هم مرکز، خطوط جریان بوده و خطوط شعاعی، خطوط پتانسیل هستند. مطابق شکل (۴-۵) ورتکس در خلاف عقربه های ساعت را مثبت در نظر می گیرند. در ورتکس آزاد، با توجه به روابط فوق داریم:

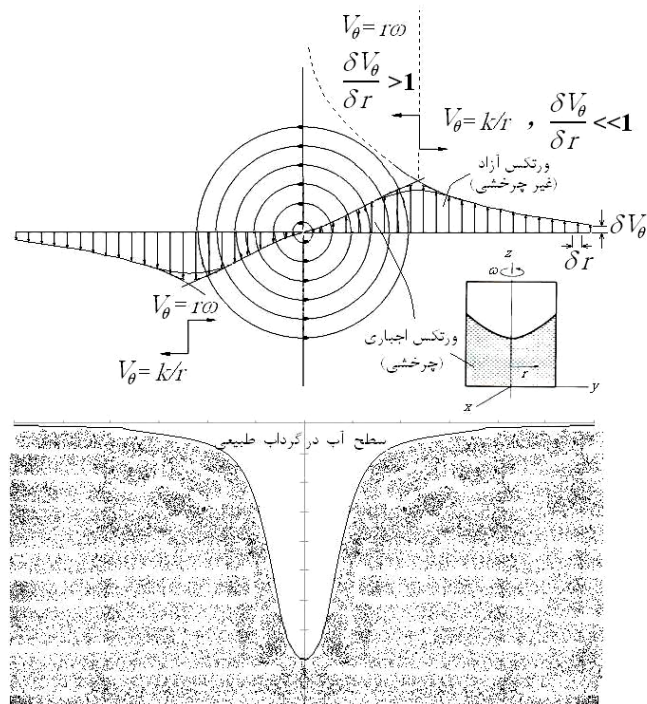
$$\begin{cases} V_{\theta} = \frac{k}{r} \\ V_r = 0 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} V_{\theta} r = cte \\ V_r = 0 \end{cases} \quad (۴-۲۰)$$

۴-۳-۱- گردآب و گردباد طبیعی

در گردآب و گردباد طبیعی چون گرادیان سرعت $\frac{dV_{\theta}}{dr}$ در فاصله دور از مرکز بسیار کوچک است، وقتی آب و یا هوا که لزجت آن ها کم است داشته باشیم، مقدار تنش برشی $\tau = \mu \frac{\partial V_{\theta}}{\partial r}$ در فاصله دور بسیار کوچک بوده و می توان گفت که جریان سیال غیر لزج و یا غیر چرخشی داریم، پس در فاصله دور، گردباد و یا گردآب یک ورتکس غیر چرخشی است ولی در فاصله نزدیک مرکز، تنش برشی قابل ملاحظه بوده و اگر گرادیان سرعت را برای ورتکس غیر چرخشی در نزدیک مرکز در نظر بگیریم، بسیار بزرگ می باشد.

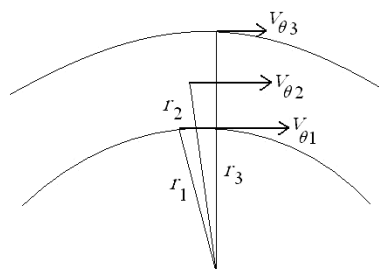


شکل ۴-۶: توزیع سرعت و انحناى سطح آب در ورتکس طبیعى

لذا وقتی تنش برشی قابل ملاحظه باشد، از اثرات آن نمی توان صرف نظر کرد و در نتیجه ورتکس چرخشی اجباری در مرکز داریم و در نزدیک مرکز $V_\theta = r\omega$ می باشد. توزیع سرعت و شکل انحناى سطح آزاد در ورتکس طبیعى مطابق با شکل (۴-۶) است.

۴-۳-۲- تغییرات سواحل و کف رودخانه در خم

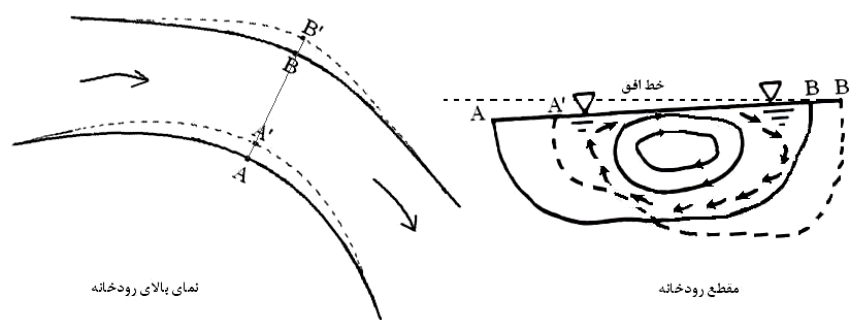
در خم یک رودخانه، مطابق شکل (۴-۷) می توان جریان را با تقریب خوب (به جز نزدیک جدار رودخانه) یک قسمت از ورتکس آزاد گرفت، در نتیجه $V_\theta r$ ثابت می باشد.



شکل ۴-۷: جریان در خم رودخانه

با توجه به این مطلب می توان توضیح داد که چرا با گذشت زمان، زمین کناره در سمت داخل خم رودخانه، افزایش و در سمت خارج خم کاهش می یابد. به عبارت دیگر رودخانه به طرف بیرون خم پیشروی می کند، همچنین عمق رودخانه در خارج خم بیشتر از داخل خم می شود. در حقیقت، زمین ساحل رودخانه در خارج خم شسته شده و در آن جهت، رودخانه زمین را اشغال می کند، در صورتیکه در داخل خم، زمین به طرف رودخانه پیش می رود.

با توجه به شکل (۸-۴) سرعت سطح آب در A بیشتر از نقطه B خواهد بود. ($V_{\theta}r = const.$) و این باعث جریان ثانویه در کف از B به A و در سطح از A به B می شود و همین باعث شسته شدن ساحل و کف نزدیک B و اضافه شدن ذرات و رسوبات کف نزدیک A می شود.



شکل ۸-۴: تغییرات سواحل و کف رودخانه در اثر وجود جریانات ثانویه

۴-۴- مفهوم ریاضی سیرکولاسیون

یکی از مطالب مهم در تئوری ایرفویل و توربین ها، تئوری سیرکولاسیون^۱ است. سیرکولاسیون بنا به تعریف، انتگرال خطی مولفه مماسی سرعت، حول یک مسیر بسته می باشد. این تئوری که پیدایش نیروی برآ حول اجسام را تعریف می کند، بر اساس سیرکولاسیون می باشد. سیرکولاسیون را با Γ نشان می دهیم که با توجه به شکل (۹-۴) عبارت داخل انتگرال ضرب داخلی دو بردار سرعت و ds

$$\Gamma = \oint_C V \cdot ds \quad \text{پس:} \quad \Gamma = \int_0^{2\pi} V dx \cos \theta$$

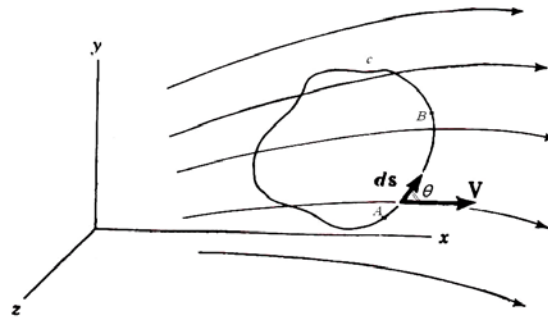
در جریان غیر چرخشی از قبل داشتیم: $V = \nabla \phi$ بنابراین:

$$V ds = \nabla \phi \cdot ds = d\phi \quad (۲۱-۴)$$

در نتیجه:

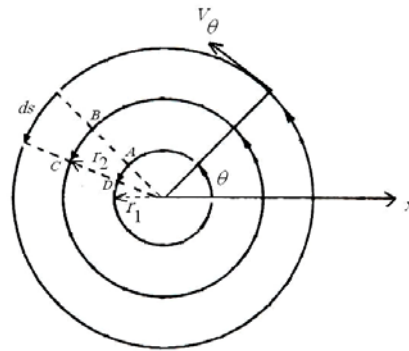
$$\Gamma = \oint_C d\phi = 0 \quad (۲۲-۴)$$

¹ Circulation



شکل ۴-۹: تعریف سیرکولاسیون

به عبارت دیگر در جریان غیر چرخشی، مقدار سیرکولاسیون، همواره برابر با صفر یعنی $\Gamma = 0$ است. ولی اگر سیرکولاسیون را حول ورتکس غیر چرخشی در خلاف جهت عقربه های ساعت در نظر بگیریم:



شکل ۴-۱۰: سیرکولاسیون حول ورتکس غیر چرخشی در خلاف جهت عقربه های ساعت

در خلاف گردش عقربه های ساعت داریم:

$$\Gamma = \oint r d\theta V_\theta = 2\pi(rV_\theta) = 2\pi C = K \quad (۴-۲۳)$$

که به این مفهوم است که سیرکولاسیون حول هر منحنی که مرکز را در بر می گیرد برابر با مقدار K است که به علت چرخشی بودن در مرکز ورتکس است. ولی اگر منحنی ای را در نظر بگیریم که مرکز را در بر نگیرد، خواهیم داشت:

$$\Gamma_{ABCD} = \Gamma_{AB} + \Gamma_{BC} + \Gamma_{CD} + \Gamma_{DA}$$

$$\text{چون: } V_{\theta_2} r_2 = V_{\theta_1} r_1$$

$$\Gamma_{ABCD} = 0 + (-V_{\theta_2} r_2 \theta) + 0 + (V_{\theta_1} r_1 \theta) = 0$$

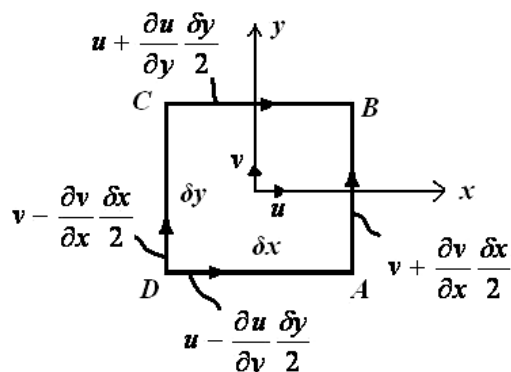
پس در تمام نقاط، جریان غیر چرخشی است غیر از مرکز ورتکس، که آن نقطه را نقطه منفرد می گویند.

۴-۵- ورتیسیته

همان طور که پیشتر نیز گفته شد، ورتیسیته^۱ دو برابر چرخش است.

$$\xi_z = 2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (۴-۲۴)$$

مقدار ورتیسیته را با شکل زیر نیز می توان محاسبه کرد.



شکل ۴-۱۱: شکل المان تحت ورتیسیته

در شکل (۴-۱۱) برای المان ABCD سیرکولاسیون حول منحنی بسته ABCD برابر است با:

$$\delta \Gamma_{ABCD} = \Gamma_{AB} + \Gamma_{BC} + \Gamma_{CD} + \Gamma_{DA} \quad (۴-۲۵)$$

پس:

$$\delta \Gamma_{ABCD} = \delta y \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) \delta x - \delta y \left(v - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) + \left(u - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) \delta x$$

و در نتیجه

$$\delta \Gamma_{ABCD} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta x \delta y = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta A = \xi_z \delta A \quad (۴-۲۶)$$

$$\xi_z = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta \Gamma_{ABCD}}{\delta A} \quad (۴-۲۷)$$

$$\lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta \Gamma}{\delta A} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \xi_z \quad (۴-۲۸)$$

که δA مساحت المان می باشد. پس ورتیسیته، حد نسبت سیرکولاسیون به سطح می باشد. چون سیرکولاسیون در مرکز هر ورتکس آزاد صفر نمی باشد، جریان در این نقطه غیر چرخشی نخواهد بود. ولی در میدانی که در تمام نقاط، مقدار ورتیسیته صفر است (غیر چرخشی است) سیرکولاسیون

¹ Vorticity

برای هر منحنی بسته نیز صفر خواهد بود و یا برعکس اگر مقدار سیرکولاسیون صفر باشد، می توان گفت که آن میدان غیر چرخشی است و در میدانی که در یک یا چند نقطه، مقدار ورتیسیته صفر نباشد، سیرکولاسیون برابر مجموع مقدار ورتیسیته ضربدر المان سطح آن نقاط است:

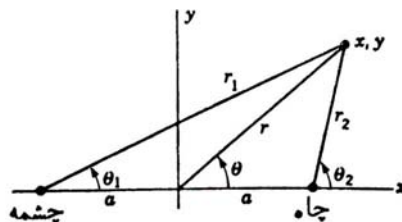
$$\Gamma = \oint V \cdot ds = \iint_A \xi_z dA \quad (۲۹-۴)$$

۶-۴- دوبلت (دوقلو)

۶-۴-۱- ترکیب چشمه و چاه

یکی دیگر از جریان های غیر چرخشی پایه که از توام کردن چشمه و چاه به وجود می آید دوبلت^۱ است. طبق شکل یک چشمه و چاه با قدرت مساوی را در نظر می گیریم:

$$\psi = \psi_{\text{چشمه}} + \psi_{\text{چاه}} \quad (۳۰-۴)$$



شکل ۶-۱۲: ترکیب چشمه و چاه

پس تابع جریان کل برابر است با:

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) \quad (۳۱-۴)$$

که می توان نوشت:

$$\frac{2\pi\psi}{Q} = (\theta_1 - \theta_2)$$

و هر گاه از دو طرف تانژانت بگیریم:

$$\tan\left(\frac{2\pi\psi}{Q}\right) = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2}$$

از شکل (۶-۱۲) می توان دید که:

$$\tan \theta_1 = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta + a} \quad \text{و} \quad \tan \theta_2 = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta - a}$$

پس:

¹ Doublet

$$\tan\left(\frac{2\pi\psi}{Q}\right) = \frac{\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta + a} - \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta - a}}{1 + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta - a^2}}$$

پس از ساده سازی:

$$\tan\left(\frac{2\pi\psi}{Q}\right) = \frac{-2ar \sin \theta}{r^2 - a^2}$$

در نتیجه تابع جریان حاصل از ترکیب چشمه و چاه به صورت زیر می باشد:

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{2ar \sin \theta}{r^2 - a^2}\right) \quad (۳۲-۴)$$

۴-۶-۲- تعریف دوبلت (دوقلو)

دوبلت از یک چشمه و چاه هم قدرت که به طرف یکدیگر نزدیک می شوند تشکیل شده است، به گونه ای که فاصله آنها کاهش می یابد ($a \rightarrow 0$) و قدرت آنها همزمان افزایش می آید ($m = \frac{Q}{2\pi} \rightarrow \infty$) و به نحوی که حاصلضرب قدرت و فاصله در همه حال ثابت باشد، ($2ma \rightarrow \lambda$) که λ مقداری است ثابت و قدرت دوبلت خوانده می شود.

در حد وقتی $a \rightarrow 0$ ، خواهیم داشت $\tan^{-1}(\) = (\)$ در این حالت $\left(\frac{r}{r^2 - a^2} \rightarrow \frac{1}{r}\right)$ می شود و تابع جریان بیان شده با رابطه (۴-۳۱) به صورت زیر در می آید:

$$\psi = -\frac{\lambda \sin \theta}{r} \quad (۳۳-۴)$$

و به همین ترتیب تابع پتانسیل که متعامد تابع جریان است، بدین صورت می شود:

$$\varphi = +\frac{\lambda \cos \theta}{r} \quad (۳۴-۴)$$

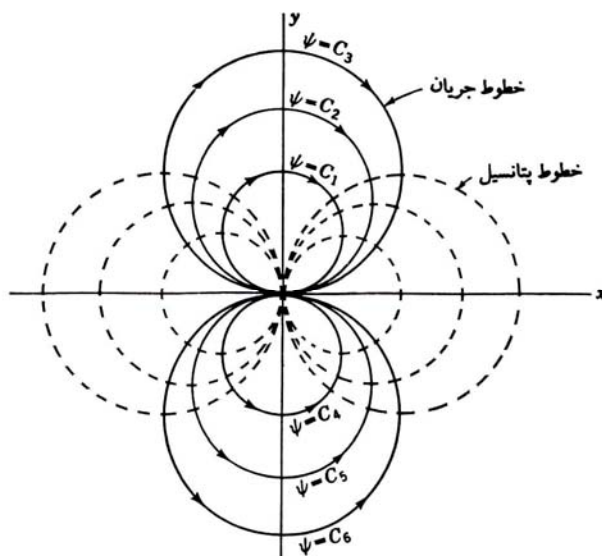
شکل خطوط جریان و خطوط پتانسیل دوایری هستند که مراکز آنها به ترتیب روی محورهای x و y می باشند.

چشمه و چاه و دوبلت و ورتکس آزاد جریان های کاملاً فیزیکی نیستند، ولی این جریان ها را می توان به صورت های مختلف با همدیگر و با جریان موازی ترکیب کرد و شکل تقریبی بعضی از جریان های فیزیکی را به دست آورد. اگر وسیله ای مثل قسمت محدب قاشق را روی سطح مایعی مثل آب بکشیم در ابتدا جریانی تقریباً شبیه دوبلت خواهیم داشت.

مولفه های سرعت هر نقطه در دوبلت برابر است با:

$$V_r = -\frac{\lambda \cos \theta}{r^2} \quad (۳۵-۴)$$

$$V_\theta = -\frac{\lambda \sin \theta}{r^2} \quad (۳۶-۴)$$



شکل ۴-۱۳: توابع پتانسیل و جریان دوبلت

و اندازه بردار سرعت در هر نقطه برابر است با:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} = \frac{\lambda}{r^2} \quad (۳۷-۴)$$

در فصل بعد نشان خواهیم داد شکل تابع جریان غیر دائمی در یک استوانه متحرک در سیال ساکن مشابه دوبلت است.

تمرین های فصل چهارم

۴-۱- نشان دهید تابع $\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r$ هارمونیک است، یعنی در معادله لاپلاس صدق می کند.

۴-۲- پتانسیل سرعت در یک میدان جریان دو بعدی به صورت $\varphi = \frac{5}{3}x^3 - 5xy^2$ است. نشان

دهید که رابطه پیوستگی ارضاء می شود، همچنین تابع جریان متناظر با آن را بیابید.

۴-۳- تابع جریان برای یک جریان دو بعدی، تراکم ناپذیر و غیر لزج به صورت

$\psi = r^{4/3} \sin \frac{4}{3}\theta$ پیشنهاد شده است. نشان دهید این تابع هارمونیک است و تابع جریان

و پتانسیل سرعت این جریان، به ترتیب رابطه پیوستگی و شرط غیر چرخشی را ارضاء

می کند. ضمن ترسیم خط جریان $\psi = 0$ که از مبدأ مختصات می گذرد، تعبیر فیزیکی

این جریان را مشخص کنید.

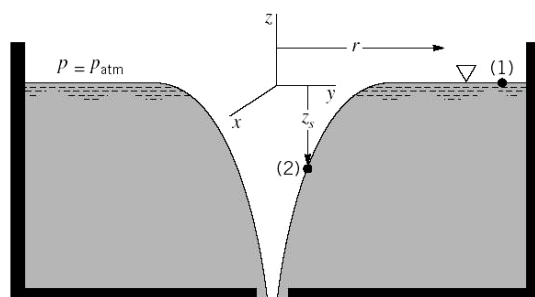
۴-۴- اگر آب از سوراخی در کف یک مخزن بسیار بزرگ خارج شود، شکل خطوط جریان به

چه صورت خواهد بود؟ نشان دهید تابع جریان دو بعدی به صورت $\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$

است. با نوشتن رابطه برنولی بین نقاط مشخص شده در شکل نشان دهید معادله سطح

آزاد در قسمت غیر چرخشی، به صورت $z_s = \frac{\Gamma^2}{8g\pi^2 r^2}$ می باشد. شکل سطح آزاد در

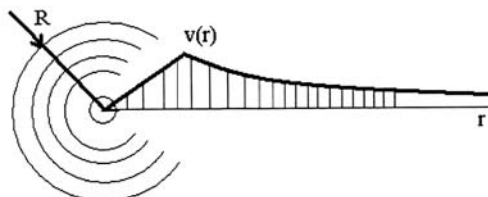
قسمت چرخشی به چه صورت است؟



شکل ۴-۱۴: مربوط به تمرین ۴-۴

۴-۵- یک گردباد را می توان به شکل یک جریان دورگرد (ورتکس) مطابق شکل زیر مدل کرد که در آن:

$$V_r = V_z = 0 \quad \text{و} \quad V_\theta = \begin{cases} \omega r & : r \leq R \\ \frac{\omega R^2}{r} & : r > R \end{cases}$$



شکل ۴-۱۵: مربوط به تمرین ۴-۵

مشخص کنید که این جریان در داخل و خارج شعاع R چرخشی یا غیر چرخشی است ؟ با استفاده از معادله ممتموم در جهت r توزیع فشار داخل گردباد را بصورت تابعی از r با این فرض که $p = p_\infty$ وقتی $r \rightarrow \infty$ به دست آورید. مقدار و مکان کمترین فشار را بیابید.

۴-۶- با توجه به $V = \nabla \phi$ در جریان پتانسیل نشان دهید سیرکولاسیون حول دوبلت، صفر یا مقدار دیگری است؟ آیا می توان گفت در تمام نقاط دوبلت، جریان غیر چرخشی است؟

فصل پنجم

ترکیب جریان های ساده

۱-۵- ترکیب ترسیمی جریان یا جمع گرافیک الگوهای جریان

در این فصل جمع گرافیکی توابع جریان $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots$ را بررسی می کنیم. در مثال زیر یک چشمه و یک چاه که در فاصله ای روی محور در صفحه افقی قرار گرفته اند، الگوی جدیدی ایجاد می کنند که توابع جریان و پتانسیل سرعت، برابر مجموع توابع جریان و پتانسیل چشمه و چاه می باشد.

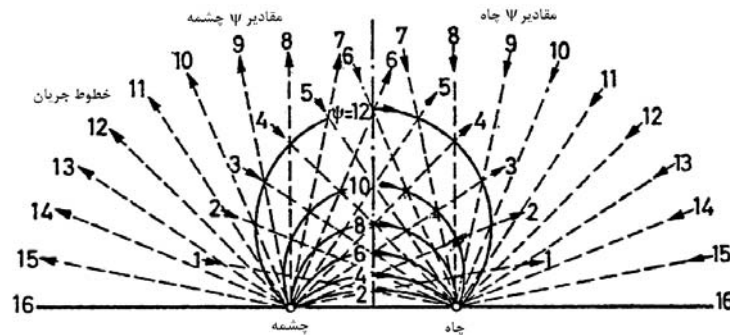
$$\begin{cases} \psi_1 = m\theta_1 \\ \psi_2 = -m\theta_2 \end{cases} \rightarrow \psi = \psi_1 + \psi_2 = m\theta_1 - m\theta_2 = -m(\theta_2 - \theta_1) \quad (۱-۵)$$

در این حالت ترکیب خطوط جریان چشمه و چاه اولیه تشکیل خطوط جریان جدیدی را می دهد، خطوط جریان رسم شده در شکل (۱-۵) این موضوع را نشان می دهد.

$$\psi = -m \tan^{-1} \left(\frac{2ar \sin \theta}{r^2 - a^2} \right) = -m \tan^{-1} \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) \quad (۲-۵)$$

در شکل (۱-۵) می توان دید که ψ ترکیب، مجموع ψ های چشمه و چاه است، به عنوان مثال، خط $\psi = 12$ جریان ترکیب، از به هم پیوستن نقاط تقاطع ψ های چشمه و چاه به صورت زیر تشکیل شده است:

$$12 = \psi = \psi_{\text{چشمه}} + \psi_{\text{چاه}} = 1 + 11 = 2 + 10 = 3 + 9 = \dots = 11 + 1 = 12$$



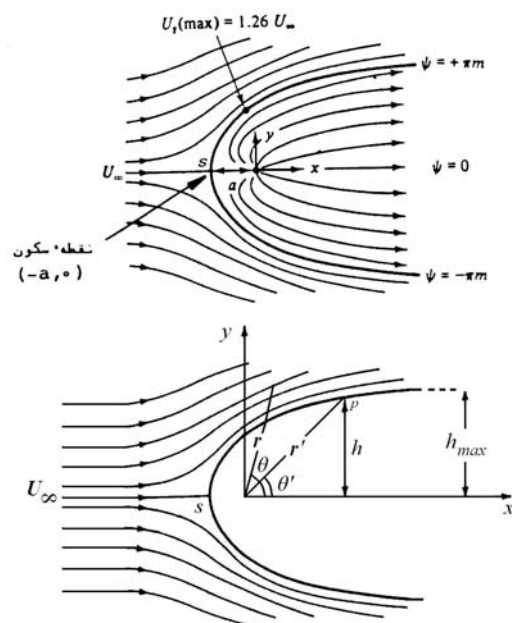
شکل ۱-۵: ترکیب ترسیمی جریان چشمه و چاه

۲-۵- ترکیب چشمه و جریان یکنواخت (جریان حول نیم بدنه)

ترکیب کردن یک چشمه با جریان موازی، جریان جدیدی را تولید می کند. اگر چشمه در مبدا مختصات قرار داشته باشد و جریان یکنواخت با سرعت $U = U_{\infty}$ در امتداد موازی با محور X جریان داشته باشد، یک خط جریان منطبق بر محور X هاست که در نقطه S دو شاخه می شود و جریان، تمام چشمه را در برمی گیرد. این دو شاخه را می توان جدار جسم جامد (نیم بدنه) فرض کرد. در آن صورت الگوی جریان به شکل جریان حول نیم بدنه شکل (۲-۵) در خواهد آمد:

$$\psi = \psi_{\text{جریان یکنواخت}} + \psi_{\text{چشمه نیم بدنه}} \quad (۳-۵)$$

جریان در اطراف پایه یک پل، جریان حول یک جزیره، جریان به طرف تپه، یا جریان آب در کانالی با شیب بسیار کم که عمق آن کم می شود، نمونه هایی از این جریان می باشند. در سیال حقیقی، خطوط جریان مرکزی قدری از هم دورتر می شوند و دو گروه در دو طرف S به وجود می آید. ولی به صورت تئوری، محل سکون در نقطه S است و سرعت در آن نقطه صفر می باشد. هر خط جریان را می توان جدار جامد فرض کرد و به صورت تحلیلی توزیع سرعت و فشار را روی آن پیدا کرد.



شکل ۵-۲: ترکیب چشمه و جریان موازی (جریان اطراف نیم بدنه)

الف- تابع جریان، با ترکیب توابع جریان یکنواخت و جریان چشمه به شکل زیر می باشد:

$$\psi = Ur \sin \theta + m\theta \quad (۴-۵)$$

ب- معادله پروفیل نیم بدنه، خط جریانی است که از نقطه سکون S می گذرد. در نقطه S سرعت صفر است: $V_s = 0$ و سرعت جریان چشمه با جریان موازی خنثی می شود.

پس در نقطه $S(r_s, \pi)$:

$$V_s = 0 \rightarrow \begin{cases} V_r = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\theta} = U \cos \theta + \frac{m}{r_s} = 0 \\ V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (۵-۵)$$

در نتیجه $r_s = \frac{m}{U} = \frac{Q}{2\pi U}$ و $\theta = \pi$ حاصل می شود که محل S را مشخص می کند. برای پیدا کردن مقدار ثابت ψ که از نقطه S می گذرد در معادله ψ به جای r مقدار $\frac{m}{U}$ و به جای θ مقدار π را قرار می دهیم، و مقدار ثابت خط جریان برابر خواهد بود با:

$$\psi_s = U \frac{m}{U} \sin \pi + m\pi = m\pi = \frac{Q}{2} \quad (۶-۵)$$

پس معادله خط جریانی که از S می گذرد بدین صورت است:

$$\psi = Ur \sin \theta + m\theta = m\pi \quad (۷-۵)$$

در نتیجه با نوشتن معادله (۷-۵) بر حسب r معادله پروفیل نیم بدنه به صورت زیر به دست می آید:

$$r = \frac{m}{U \sin \theta} (\pi - \theta) = \frac{m}{U \pi \sin \theta} \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) \quad (۸-۵)$$

همچنین:

$$\vec{V} = \vec{V}_\theta + \vec{V}_r \quad (۹-۵)$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_\theta^2 + V_r^2} \quad (۱۰-۵)$$

سرعت روی نیم بدنه به صورت زیر است:

$$V_r = U \cos \theta + \frac{m}{r} \quad (۱۱-۵)$$

$$V_\theta = -U \sin \theta \quad (۱۲-۵)$$

$$|\vec{V}|^2 = U^2 + \frac{m^2}{r^2} + \frac{2m}{r} U \cos \theta \quad (۱۳-۵)$$

ج- نصف ضخامت نیم بدنه (h)

در هر نقطه ای مثل $P(r', \theta')$ روی نیم بدنه با توجه به رابطه (۸-۵) داریم:

$$h = r' \sin \theta' = \frac{Q \sin \theta'}{2\pi U \sin \theta'} (\pi - \theta')$$

که با جایگذاری $m = \frac{Q}{2\pi}$ به دست آمده است، به عبارت دیگر:

$$h = \frac{m(\pi - \theta')}{U} \quad (۱۴-۵)$$

در حد وقتی که $\theta' \rightarrow 0$ و $r \rightarrow \infty$ مقدار ماکزیمم h از رابطه زیر به دست می آید:

$$h_{\max} = \frac{m\pi}{U} = \frac{Q}{2U} \quad (۱۵-۵)$$

در این ضخامت سرعت جریان برابر با سرعت جریان یکنواخت (U) می باشد.

$$V_r = U \cos(0) + \frac{m}{\infty} = U \quad (۱۶-۵)$$

اگر در بی نهایت که سرعت U است فشار P_∞ باشد. فشار در هر نقطه روی نیم بدنه را می توان از رابطه برنولی به دست آورد. در حالی که دو مقطع، با ارتفاع یکسان باشند داریم:

$$\frac{P_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2} = \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} \quad (۱۷-۵)$$

با توجه به (۱۳-۵) خواهیم داشت:

$$\frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \frac{V^2}{U^2} = -\frac{m}{U^2} \left(\frac{m}{r^2} + \frac{2U \cos \theta}{r} \right) \quad (۱۸-۵)$$

د- در روی صفحه نیم بدنه از رابطه (۷-۵) داریم: $\frac{m}{U} = \frac{r \sin \theta}{(\pi - \theta)}$ پس (۱۸-۵) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{P - P_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho U^2} = -\frac{\sin \theta}{\pi - \theta} \left(\frac{\sin \theta}{\pi - \theta} + 2 \cos \theta \right) \quad (۱۹-۵)$$

در این حالت چون در طول مسیر سرعت جریان افزایش می یابد و کاهش سرعت بسیار کم است جدایی نداریم. به جز لایه های نزدیک جدار بقیه جریان را در عمل می توان با دقت خوب غیر چرخشی فرض کرد و از روابط فوق استفاده کرد. در محلی که $P = P_{\infty}$ است، سرعت در جداره در زاویه ای حدود $\theta \approx 113.3^\circ$ ماکزیمم می شود و سرعت ماکزیمم $(1.26U)$ کمی از سرعت U بیشتر است و بعد از این نقطه تا بی نهایت سرعت به طور آهسته کاهش می یابد و در بی نهایت به سرعت U می رسد. عملاً سرعت در فاصله ای بیشتر از $4h_{\max}$ از نقطه سکون، تقریباً برابر U می شود.

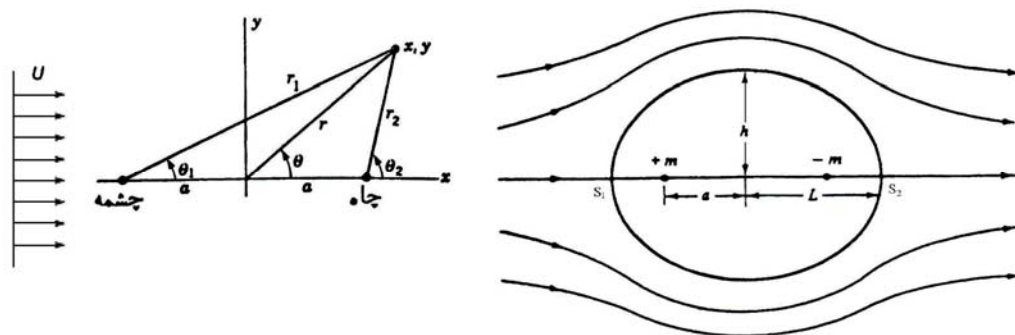
۳-۵- بیضی رانکین

جریان حول یک شکل بیضی دو بعدی، با جمع و ترکیب جریان موازی با چشمه و چاه با قدرت مساوی ایجاد می شود. برای این ترکیب تابع جریان به صورت زیر خواهد بود:

$$\psi = Ur \sin \theta + m(\theta_1 - \theta_2) \quad (۲۰-۵)$$

و تابع پتانسیل سرعت نیز بدینگونه می باشد:

$$\varphi = Ur \cos \theta + m(\ln r_1 - \ln r_2) \quad (۲۱-۵)$$



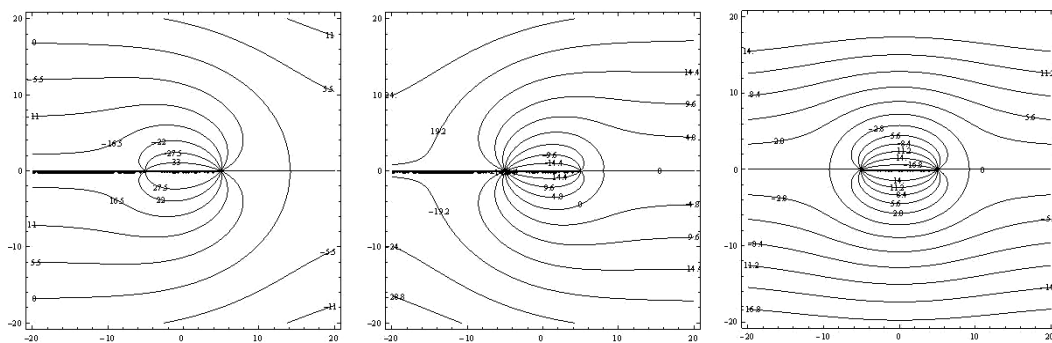
شکل ۳-۵: ترکیب جریانها و مشخصات بیضی رانکین

همان طور که قبلاً دیدیم θ_1 و θ_2 همچنین r_1 و r_2 را می توان بر حسب r و θ مشخص کرد، در این صورت تابع جریان به صورت زیر می شود:

$$\psi = Ur \sin \theta - m \tan^{-1} \left(\frac{2ar \sin \theta}{r^2 - a^2} \right) \quad (۲۲-۵)$$

$$\psi = Uy - m \tan^{-1} \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) \quad (۲۳-۵)$$

با برابر قرار دادن تابع جریان با ثابتهای مختلف، معادله خطوط جریان به دست می آید و اگر تعدادی از این خطوط از جمله خط $\psi = 0$ را رسم کنیم، متوجه خواهیم شد که در حالتی که قدرت چشمه و چاه یکسان باشد، خط $\psi = 0$ مطابق شکل (۳-۵) یک منحنی بسته بیضی شکل را تشکیل می دهد.



قدرت چاه دو برابر چشمه

چشمه دو برابر چاه

 $a=5$, $m=6$

شکل ۵-۴: خطوط جریان مختلف با ترکیب جریان یکنواخت و چشمه و چاه

شکل (۵-۴) سمت راست را که در آن قدرت چشمه و چاه برابرند می توان جریان حول استوانه با مقطع بیضی شکل، در نظر گرفت. نقطه سکون را می توان در جایی روی محور x مشخص کرد که سه قسمت سرعت در اثر جریانهای موازی و چشمه و چاه یکدیگر را خنثی می کنند و مشخصات این نقطه بستگی به مقادیر a و U دارد.

با انتخاب چشمه و چاه با قدرت های مختلف و جریان موازی با سرعت های متفاوت، پروفیل های مختلف را می توان پیدا کرد.

در حالتی که قدرت چشمه و چاه برابر و فاصله چشمه از چاه برابر $2a$ است. نصف طول بیضی (L) را می توان با تعیین محل نقطه سکون به دست آورد، از (۲۲-۵) خواهیم داشت:

$$V_r \Big|_s = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0}^{r=L} = U - \frac{2ma}{L^2 - a^2} = 0$$

در نتیجه نصف طول بیضی برابر می شود با:

$$L = \left(\frac{2ma}{U} + a^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۲۴-۵)$$

و یا

$$\frac{L}{a} = \left(\frac{2m}{Ua} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۵-۲۵)$$

در روی بیضی $\psi = 0$ است، پس در نقطه $(r, \theta) = (h, \frac{\pi}{2})$ روی بیضی از (۵-۲۲) داریم:

$$\frac{Uh}{m} = \tan^{-1} \left(\frac{2ah}{h^2 - a^2} \right)$$

در نتیجه نیم پهنای بدنه بیضی می شود:

$$h = \frac{h^2 - a^2}{2a} \tan \frac{Uh}{m} \quad (۵-۲۶)$$

و یا

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{h}{a} \right)^2 - 1 \right) \tan \left(\frac{Uh}{m} \right) \quad (۵-۲۷)$$

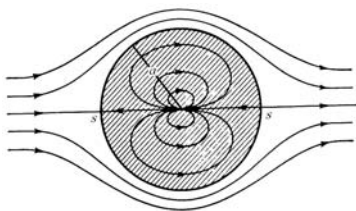
در عمل برای سیال آب و هوا، به جز قشر نازکی در نزدیکی جدار بیضی و دنباله ای پشت بیضی، در بقیه قسمت ها جریان را می توان ایده آل غیر چرخشی در نظر گرفت و خط جریان و توزیع سرعت در جلو و حتی تا حدودی زیر و روی بیضی با تابع فوق قابل محاسبه است، خصوصا اگر بیضی نازک باشد، مثلا در پروفیل مقطع برخی انواع کشتی ها و ...

۵-۴- جریان حول استوانه با مقطع دایره

از حالت قبل نیز می توان دید، وقتی چشمه و چاه به هم نزدیک می شوند و در حد وقتی a به صفر میل می کند، مجموع چشمه و چاه، دوبلت شده و شکل جسم، یک دایره بسته می شود. لذا جریان حول استوانه با مقطع دایره از ترکیب دوبلت و جریان یکنواخت با سرعت U به دست می آید.

$$\psi = Ur \sin \theta - \frac{\lambda \sin \theta}{r} \quad (۵-۲۸)$$

$$\varphi = Ur \cos \theta + \frac{\lambda \cos \theta}{r} \quad (۵-۲۹)$$



شکل ۵-۵: شکل خطوط جریان اطراف استوانه (ترکیب جریان یکنواخت و دوبلت)

رابطه تابع جریان را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

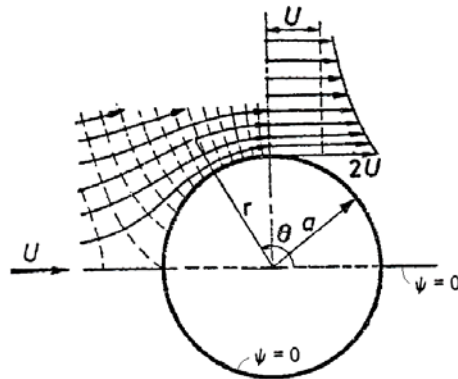
$$\psi = \left(U - \frac{\lambda}{r^2} \right) r \sin \theta \quad (۳۰-۵)$$

با قرار دادن ثابت اختیاری $\lambda = Ua^2$ خواهیم داشت:

$$\psi = Ur \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (۳۱-۵)$$

$$\varphi = Ur \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (۳۲-۵)$$

که خط جریان $\psi = 0$ به ازای $r = a$ ایجاد می شود که یک دایره به شعاع $a = \sqrt{\frac{\lambda}{U}}$ است. خط $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ نیز جزو خط جریان $\psi = 0$ است. بقیه جریان خارج دایره را می توان جریان حول استوانه در نظر گرفت. در فاصله دور (یعنی $r \rightarrow \infty$) مقدار سرعت U می شود. شکل خطوط جریان خارج دایره در زیر نشان داده شده است.



شکل ۵-۶: شکل خطوط در خارج استوانه

مولفه های سرعت در هر نقطه از روابط زیر به دست می آیند:

$$\begin{cases} V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = - \frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \end{cases} \quad (۳۳-۵)$$

و برای سطح استوانه که $r = a$ می باشد:

$$V_{r=a} = -2U \sin \theta \quad (۳۴-۵)$$

روی استوانه دو نقطه $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ نقاط سکون هستند که در آنها $V = 0$ می شود. در $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ مقدار سرعت دو برابر سرعت جریان موازی ($2U$) خواهد بود.

فشار روی استوانه را می توان از رابطه برنولی بین هر نقطه ای روی استوانه و نقطه ای واقع در فاصله دور که سرعت در آن U و فشار P_∞ می باشد، به دست آورد:

$$\frac{P_\infty}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} = \frac{P}{\gamma} + \frac{4U^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (۵-۳۵)$$

$$\frac{P - P_\infty}{\rho g} = \frac{U^2}{2g} - \frac{U^2 \sin^2 \theta}{g} \quad (۵-۳۶)$$

$$\frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} = C_p \quad (۵-۳۷)$$

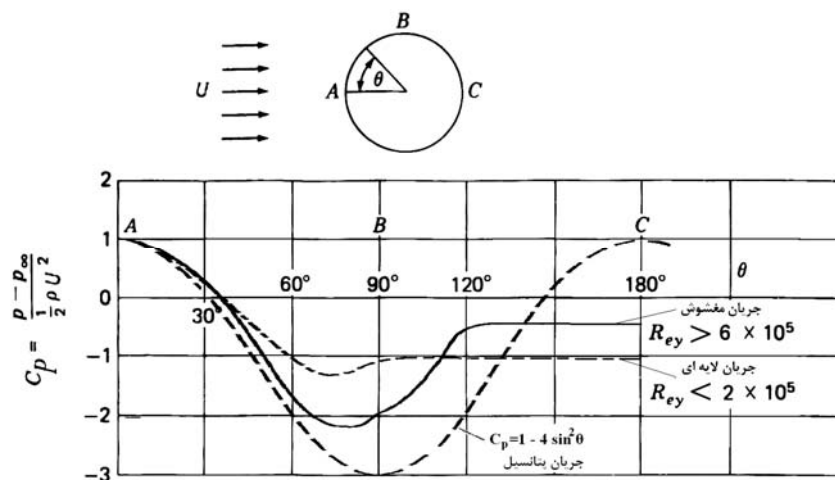
$$C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (۵-۳۸)$$

حال داریم:

$$\theta = \pi \Rightarrow \frac{P - P_\theta}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1$$

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{P - P_\theta}{\frac{1}{2} \rho U^2} = -3$$

در شکل زیر، منحنی توزیع ضریب فشار بی بعد، برای جریان پتانسیل غیر چرخشی با جریان حقیقی لایه ای و مغشوش، مقایسه شده است:

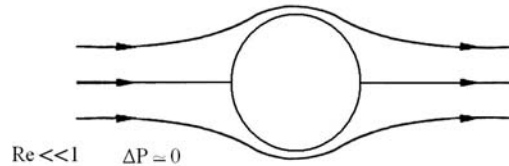


شکل ۵-۷: توزیع فشار روی استوانه برحسب زاویه θ و بر اساس نوع جریان

۵-۵- جریان حقیقی اطراف استوانه

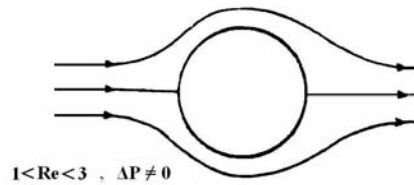
در وضعیت حقیقی، جریان اطراف استوانه با عدد رینولدز $\frac{VD}{\nu}$ به شرح زیر تغییر می کند.

(۱) در اعداد رینولدز خیلی کم، جریان در تمام میدان چرخشی است.



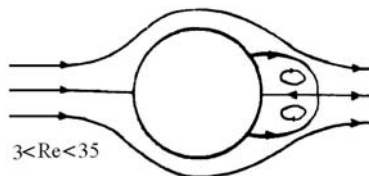
شکل ۵-۸: شکل متقارن جریان کاملاً چرخشی اطراف استوانه

(۲) با کمی افزایش رینولدز نیز همچنان بیشتر منطقه جریان چرخشی است.



شکل ۵-۹: شکل نامتقارن جریان اطراف استوانه

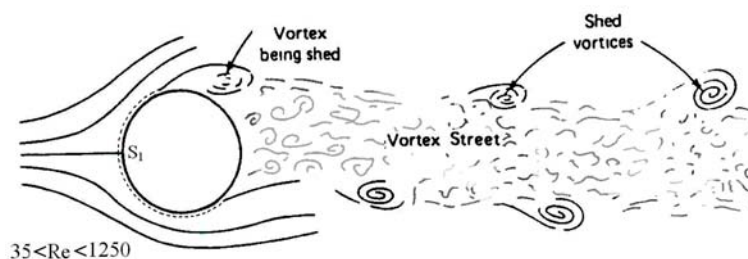
(۳) با افزایش بیشتر رینولدز در پشت استوانه، گردابه های ثابت ایجاد می شوند، هنوز در فاصله دور از جسم می توان جریان را غیر چرخشی فرض کرد.



شکل ۵-۱۰: تشکیل گرداب ثابت پس از جدایی در جریان لایه ای اطراف استوانه

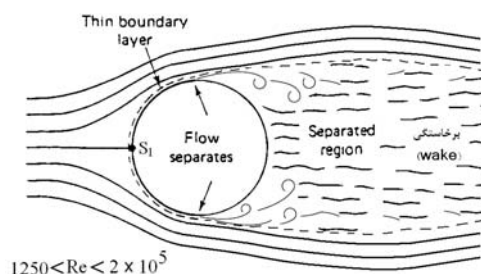
نقطه سکون، طبق تعریف نقطه ای است که در آن سرعت جریان غیر چرخشی، صفر است. بنابراین در موارد فوق نقطه سکون وجود ندارد.

(۴) با افزایش بیشتر رینولدز پدیده تکثیر گردابه های متناوب مشاهده می شود. به جز در منطقه پشت جسم و در لایه ای نزدیک جدار در بقیه قسمت ها می توان جریان را غیر چرخشی در نظر گرفت.



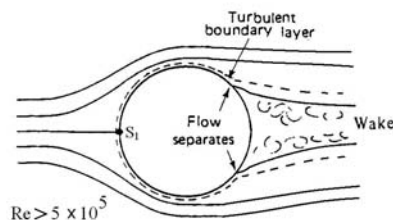
شکل ۵-۱۱: پدیده تکثیر گردابه های متناوب در پشت استوانه (خیابان ورتکس)

(۵) با افزایش بیشتر رینولدز جدایش ایجاد می گردد. در لایه نازک نزدیک جدار و تمام پشت جسم جریان چرخشی است و بقیه قسمت ها غیر چرخشی است.



شکل ۵-۱۲: ایجاد منطقه برخاستگی جریان در پشت استوانه

(۶) با افزایش بیشتر رینولدز، لایه مرزی نزدیک جدار مغشوش می گردد. به جز در لایه نازکی در جلوی جسم و قسمت کوچکی از پشت جسم، بقیه جریان، شبیه جریان غیر چرخشی است.



شکل ۵-۱۳: لایه مرزی مغشوش اطراف استوانه

۵-۶- الگوی جریان استوانه متحرک در سیال ساکن

در الگوی گذشته ناظر و استوانه ثابت بودند و سیال حرکت می کرد. در حالت الگوی غیر دائمی، ناظر ثابت، استوانه متحرکی را مشاهده می کند که با سرعت ثابت در سیال ساکنی حرکت می کند. بنابراین الگوی جریان مطابق شکل (۵-۱۴) خواهد بود. این الگو به غیر از قسمت داخل استوانه، شبیه یک دوبلت است $\left(\psi = -\frac{\lambda \sin \theta}{r} = \frac{\lambda y}{x^2 + y^2} \right)$ و سرعت سیال در هر نقطه ای به فاصله r از مرکز سیلندر در هر لحظه برابر است با:

$$|V| = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} \quad (۵-۳۹)$$

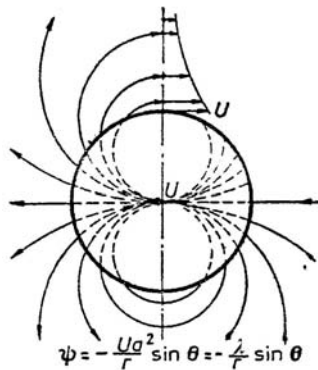
$$\begin{cases} V_r = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\theta} = -\frac{\lambda \cos \theta}{r^2} \\ V_\theta = -\frac{d\psi}{dr} = -\frac{\lambda \sin \theta}{r^2} \end{cases} \quad (۵-۴۰)$$

با جایگذاری (۵-۴۰) در (۵-۳۹) خواهیم داشت:

$$|V| = \frac{\lambda}{r^2} \quad (۵-۴۱)$$

با قرار دادن $\lambda = a^2 U$ بزرگی سرعت در هر نقطه جریان برابر خواهد بود با:

$$V = \frac{a^2}{r^2} U \quad (۵-۴۲)$$



شکل ۵-۱۴: استوانه متحرک در سیال ساکن

وقتی جسم از حالت سکون در سیال حرکت می کند و به سرعت ثابت (U) می رسد، نیرویی لازم است که به جسم و سیال اطراف شتاب دهد، و آن را به حالت نهایی برساند. در هر لحظه مقدار کل انرژی جنبشی سیال در اطراف سیلندر برابر است با:

$$T = \int_a^\infty \frac{1}{2} V^2 dM \quad (۴۳-۵)$$

پس برای واحد طول استوانه مقدار انرژی جنبشی سیال وقتی سرعت به V می رسد برابر است با:

$$T = \int_a^\infty \frac{1}{2} V^2 (2\pi r \rho dr) = \pi \rho \int_a^\infty \frac{a^4 U^2}{r^3} dr = \pi \rho a^4 U^2 \int_a^\infty \frac{dr}{r^3} = \pi \rho a^4 U^2 \left[\frac{1}{2} r^{-2} \right]_a^\infty$$

در نتیجه:

$$T = \frac{1}{2} \rho \pi a^2 U^2 = \frac{1}{2} M' U^2 \quad (۴۴-۵)$$

که در آن:

$$M' = \rho_f \pi a^2 \quad (۴۵-۵)$$

انرژی سینتیک کل برابر است با انرژی جنبشی جسم و سیال، برای واحد طول سیال داریم:

$$T = \frac{1}{2} (M' + M) U^2 = \frac{1}{2} (\rho_f + \rho_b) \pi a^2 U^2 \quad (۴۶-۵)$$

در این روابط ρ_f چگالی سیال و ρ_b چگالی جسم (استوانه) می باشد. برای شتاب دادن یا کند کردن استوانه، نیرویی لازم است که هم به استوانه و هم به سیال شتاب بدهد. نیروی اضافی لازم برای

شتاب دادن به سیال برابر $F' = M' \frac{du}{dt}$ است. نیروی کل برای شتاب برابر است با

$F = (M + M') \frac{du}{dt}$ که $(M + M')$ را جرم موثر می نامند. M' برابر جرم سیال هم حجم استوانه و M جرم استوانه است. مقدار M' را جرم افزوده می نامند.

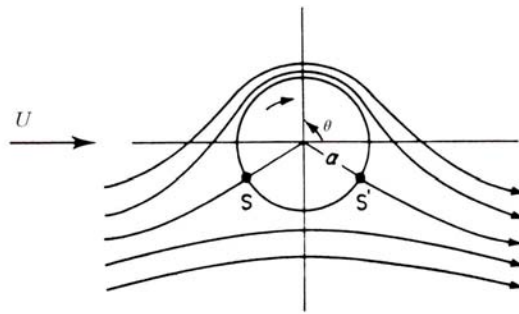
۵-۷- جریان اطراف استوانه با سیرکولاسیون

ترکیب جریان اطراف استوانه و یک ورتکس منفی، جریان اطراف استوانه با سیرکولاسیون را ایجاد می کند. تئوری سیرکولاسیون حول اجسام، پیدایش نیروی برآ را تعریف می کند. ما ابتدا حالت ساده سیرکولاسیون حول استوانه را که آغازی برای تجزیه و تحلیل آیروفویل می باشد مطالعه می کنیم. الگوی جریان از چپ به راست حول یک استوانه به شعاع a با اضافه کردن ورتکس آزاد در جهت عقربه های ساعت به وسیله توابع زیر مشخص می شود (با فرض $\lambda = Ua^2$):

$$\psi = Ur \sin \theta - \frac{\lambda \sin \theta}{r} + \frac{k}{2\pi} \ln r \quad (۴۷-۵)$$

$$\psi = U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{k}{2\pi} \ln r \quad (۴۸-۵)$$

در $r = a$ داریم $\psi = \frac{k}{2\pi} \ln a$ که مقدار ثابتی است و یک خط جریان است، پس دایره $r = a$ می تواند خط جریان روی جدار جامد باشد.



شکل ۵-۱۵: شماتیک جریان اطراف استوانه با سیرکولاسیون

در شکل (۵-۱۵) الگوی جریان نشان داده شده است. در اثر سیر کولاسیون، سرعت در یک طرف زیاد شده و در طرف دیگر کم می شود، از رابطه برنولی نتیجه می شود که فشار در طرف سرعت کم، بیشتر و در طرف سرعت زیاد، کمتر خواهد بود. پس در اثر اختلاف فشار زیر و روی استوانه، نیرویی در امتداد عمود به جریان، مثلاً در شکل فوق، به طرف بالا بر استوانه وارد می شود که نیروی برآ نامیده می شود. طبق تعریف نیرویی که عمود بر امتداد جریان به جسم وارد می شود را نیروی برآ می نامند.

برای محاسبه نیروی برآ ابتدا باید توزیع سرعت و در نتیجه توزیع فشار را روی استوانه پیدا کنیم. سرعت در روی استوانه در امتداد r صفر است ($V_r = 0$). بنابراین سرعت در روی استوانه همه جا

بر جدار مماس است، در نتیجه: $V_\theta|_{r=a} = V_\theta$

$$\left\{ \begin{aligned} V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} &= U \sin \theta - \frac{\lambda \sin \theta}{r^2} - \frac{k}{2\pi r} = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{k}{2\pi r} \end{aligned} \right. \quad (۵-۴۹)$$

$$\left\{ \begin{aligned} V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \end{aligned} \right. \quad (۵-۵۰)$$

سیرکولاسیون Γ برابر است با

$$\Gamma = \oint V \cdot ds = \int_0^{2\pi} V_\theta \cdot r d\theta = -k \quad (۵-۵۱)$$

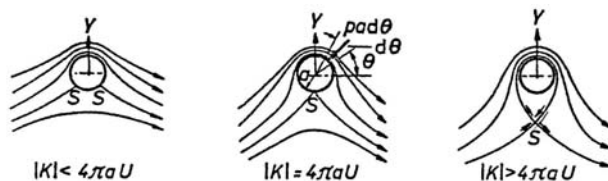
مقدار سرعت در هر نقطه روی استوانه ($r = a$) برابر است با:

$$V = V_{r=a} = -2U \sin \theta - \frac{k}{2\pi a} \quad (۵-۵۲)$$

روی استوانه در نقطه سکون داریم $V = 0$ پس:

$$\sin \theta = -\frac{k}{4a\pi U} \quad (۵-۵۳)$$

اگر $|K|$ کمتر، یا مساوی و یا بیشتر از $(4Ua\pi)$ باشد θ می تواند به ترتیب دو جواب داشته باشد، یا این که فقط یک جواب داشته باشد و یا جوابی نداشته باشد، بنابراین در روی استوانه، ممکن است دو نقطه سکون، یا یک نقطه سکون، و یا صفر نقطه سکون وجود داشته باشد در حالت $-1 < \sin \theta < 1$ دو نقطه سکون در جلو و عقب، متقارن هستند. در حالت $\sin \theta = 0$ مقدار سیرکولاسیون نیز صفر است. اگر $\sin \theta = \pm 1$ باشد فقط یک نقطه سکون وجود دارد و در حالت $\sin \theta > 1$ یا $\sin \theta < -1$ در روی استوانه اصلاً نقطه سکونی وجود ندارد.



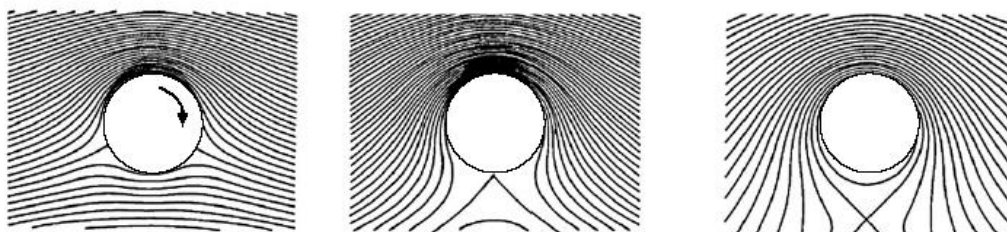
شکل ۵-۱۶: تعداد نقاط سکون در جریان غیر چرخشی حول یک استوانه با سیرکولاسیون

از رابطه برنولی خواهیم داشت:

$$\frac{P_{\infty}}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} + \frac{\left(-2U \sin \theta - \frac{k}{2\pi a}\right)^2}{2g} \quad (5-54)$$

اگر P را فشار نسبی بگیریم (یعنی $P_{\infty} = 0$):

$$\frac{P}{\rho} = \left(\frac{U^2}{2}\right) \left(1 - 4\sin^2 \theta - \frac{k^2}{4\pi^2 a^2 U^2} - \frac{2k \sin \theta}{\pi a U}\right) \quad (5-55)$$



شکل ۵-۱۷: ترسیم کامپیوتری جریان غیر چرخشی حول استوانه با سیرکولاسیون

- نیروی پسا (دراگ)^۱

نیروی پسا در امتداد جریان سیال است که از جریان به جسم وارد می شود:

$$F_{\text{Drag}} = X = - \int_0^{2\pi} p a \cos \theta d\theta = 0 \quad (5-56)$$

¹ Drag

- نیروی برآ (لیفت)^۱

نیروی وارد بر جسم در امتداد عمود بر جهت جریان می باشد.

$$F_{Lift} = Y = \int_0^{2\pi} Pa \sin \theta d\theta \quad (۵۷-۵)$$

با قرار دادن رابطه مقدار فشار روی استوانه، در رابطه نیروی برآ داریم:

$$F_{Lift} = \frac{1}{2} \rho U^2 a \int_0^{2\pi} \left(\sin \theta - 4 \sin^3 \theta - \frac{k^2 \sin \theta}{4\pi^2 a^2 U^2} - \frac{2k \sin^2 \theta}{\pi a U} \right) d\theta$$

و چون:

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = [-\cos \theta]_0^{2\pi} = 0 \quad (۵۸-۵)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = \left[-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (۵۹-۵)$$

در نتیجه:

$$F_{Lift} = Y = -\frac{\rho U k}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = -\frac{\rho U k}{\pi} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^{2\pi} = -\rho U k = \rho U \Gamma \quad (۶۰-۵)$$

بنابراین برای واحد طول سیلندر داریم، $F_L = Y = \rho U \Gamma$. این نیروی برآ (بالا برنده) که به اثر ماگنوس^۲ معروف است، به اندازه استوانه بستگی ندارد و می توان نشان داد که نیرو تابع شکل جسم نمی باشد. یعنی به هر جسمی که سیرکولاسیون اطراف آن Γ باشد نیروی لیفت فوق وارد می شود (البته در جریان سیال حقیقی مقدار سیرکولاسیون Γ تابعی از شکل و وضعیت و اندازه جسم خواهد بود). طبق رابطه (۵۶-۵) نیروی پسا صفر است ولی در سیال حقیقی اثر لزجت و جدایی باعث نیروی مقاوم (پسا) می شود. طبق تعریف نیرویی که در امتداد جریان به جسم وارد می شود را نیروی پسا می نامند.

در سیال حقیقی با به دوران در آوردن استوانه می توان یک جریان دایره ای حول استوانه ایجاد نمود. در نتیجه جریان اطراف استوانه با ورتکس خواهیم داشت و در این جریان می توان دید که نیروی برآ ایجاد می شود. این موضوع در حرکت توپ وقتی دوران داشته باشد مشاهده می شود، و یا اگر استوانه ای دوار در معرض جریان قرار گیرد، نیروی برآ به آن وارد می شود و از این موضوع می توان به عنوان مثال برای به حرکت در آوردن کشتی در اثر وزش باد استفاده کرد.

ضریب نیروی برآ C_L را به ترتیب زیر تعریف می کنند:

^۱ Lift

^۲ Magnus

$$Y = C_L \frac{1}{2} \rho U^2 A \quad (۵-۶۱)$$

که A تصویر جسم روی صفحه ای در امتداد جهت جریان است. برای استوانه با طول واحد $A=1 \times D$ است و داریم:

$$Y = C_L \frac{1}{2} \rho U^2 D \quad (۵-۶۲)$$

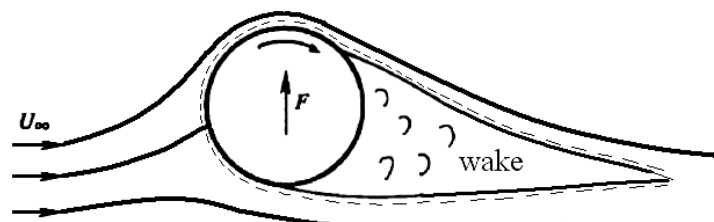
که چون:

$$Y = \rho U \Gamma \quad (۵-۶۳)$$

پس:

$$C_L = \frac{Y}{\frac{1}{2} \rho U^2 D} = \frac{\Gamma}{\frac{1}{2} U D} \quad (۵-۶۴)$$

در جریان حقیقی، مقدار ضریب نیروی برآ از مقدار فوق کمتر است، دلیل این موضوع این است که به علت جدایی، شکل جریان و توزیع فشار در جریان حقیقی، نسبت به حالت جریان غیر چرخشی تغییر می کند. شکل (۵-۱۸) جدایی جریان حقیقی اطراف استوانه با سیرکولاسیون را نشان می دهد که در آن لایه مرزی با خط چین نمایش داده شده است.



شکل ۵-۱۸: جریان حقیقی اطراف استوانه با سیرکولاسیون

تمرین های فصل پنجم

۱-۵- در جریان پتانسیل اطراف نیم بدنه نشان دهید، ماکزیمم سرعت در جداره در

زاویه ای حدود $\theta \approx 113.3^\circ$ و مقدار آن $1.26U$ می باشد.

۲-۵- استوانه ای بسیار طولانی با سرعت V در عمق دو متری آب ساکن حرکت می کند. اگر

الف- سرعت $V = 10 \frac{m}{s}$ باشد و ب- $V = 40 \frac{m}{s}$ باشد، در دو حالت جریان ایده آل و

جریان حقیقی کمترین فشار روی استوانه را پیدا کنید.

۳-۵- در جریان غیر چرخشی اطراف یک استوانه با مقطع بیضی، وقتی جریان در امتداد قطر

بزرگ بیضی باشد، تابع جریان به صورت $\psi = U r \sin \theta - \frac{Q}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2ar \sin \theta}{r^2 - a^2} \right)$ یا

$\psi = Uy - \frac{Q}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)$ است. الف- محل نقاط سکون و خط جریانی که

از نقطه سکون می گذرد (معادله بیضی) را بیابید. ب- رابطه ای برای ضریب فشار بدون

بعد $\frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}$ پیدا کنید و شکل تقریبی توزیع فشار را بر حسب θ رسم کنید. ج- اگر

جریان حقیقی هوا یا آب، اطراف بدنه بیضی شکل داشته باشیم، لایه مرزی را به

صورت تقریبی با خط چین نشان دهید و شکل تقریبی توزیع سرعت را در دو مقطع

لایه مرزی رسم کنید.

۴-۵- در مسئله قبل، در صورتی که جریان با جسم زاویه حمله داشته باشد، شکل خطوط

جریان را به طور تقریب رسم کنید و محل نقاط سکون و نقاط ماکزیمم سرعت را

مشخص کنید. حال اگر فرض کنیم حول این جسم، آب یا هوا با سرعت $2 \frac{m}{s}$ جریان

داشته باشد و قطر بزرگ بیضی $2m$ و قطر کوچک آن $0.1m$ باشد، برای واحد طول جسم، مطلوب است محاسبه نیروهای پسای اصطکاکی (پوسته ای)، فشاری و کل.

$$\rho_{air} = 1.2 \frac{kg}{m^3}, \quad v_{air} = 1.5 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}$$

$$\rho_{water} = 1000 \frac{kg}{m^3}, \quad v_{water} = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

$$C_{f-water} = 0.003, \quad C_{f-air} = 0.0025, \quad C_{D-water} = C_{D-air} = 0.1$$

۵-۵- با ترکیب دو ورتکس آزاد در خلاف جهت یکدیگر و جریان یکنواخت مطابق شکل

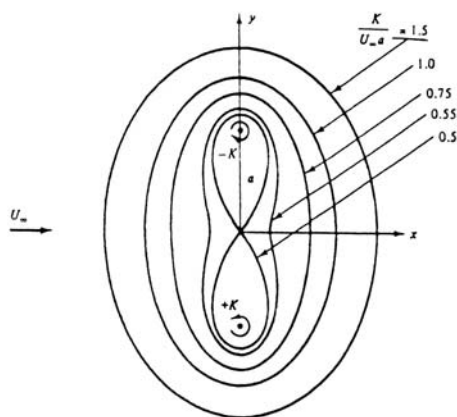
زیر، خانواده ای از بیضی های کشیده موسوم به بیضی کلوین بدست می آید. نشان دهید

تابع جریان این مجموعه $\psi = U_{\infty}y - \frac{1}{2}k \ln \frac{x^2 + (y+a)^2}{x^2 + (y-a)^2}$ می باشد و تابع پتانسیل را

بدست آورید. برای مقادیر مختلف $\frac{k}{U_{\infty}a}$ خطوط جریان را به وسیله کامپیوتر رسم کنید

و با مقایسه مشخص کنید در چه شرایطی شکل جسم با 90° درجه جرخش به بیضی

رانکین نزدیک می شود؟



شکل ۵-۱۸: مربوط به تمرین ۵-۵

۵-۶- شکل جریان ایده آل (غیر چرخشی) اطراف استوانه را رسم کنید و نقاط سکون و نقاط

دارای ماکزیمم سرعت را نشان دهید. در حالت جریان حقیقی اطراف یک استوانه، شکل

چند خط جریان و در صورت وجود لایه مرزی یا جدایی، شکل تقریبی لایه مرزی و

نوع رژیم جریان در منطقه برخاستگی را برای جریان هوا در رینولدزهای حدود 1500،

10^5 و 10^6 ترسیم کنید. با محاسبه نشان دهید در حالت جریان آب، اطراف استوانه

برای رینولدزهای 10^5 و 10^6 وقتی سرعت جریان در بینهایت $15 \frac{m}{s}$ و فشار P_∞

حدود یک اتمسفر است چه اتفاقی می افتد؟ (برای آب با دمای حدود $20^\circ C$ ضریب

لزجت و فشار بخار اشباع به ترتیب $v = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ و $P_v = 2.34 KPa$ می باشد)

۵-۷- ترکیب یک جریان آزاد با سرعت $10 \frac{m}{s}$ ، یک دوبلت به قدرت $\lambda = 40 \frac{m^3}{s}$ و یک

ورتکس غیر چرخشی با سیرکولاسیون $\Gamma = 200 \frac{m^2}{s}$ را که تشکیل جریان ایده آل

اطراف استوانه با سیرکولاسیون می دهد در نظر بگیرید. مطلوب است تعیین نقاط

سکون، همچنین محل نقاط و مقدار ماکزیمم و مینیمم سرعت و فشار روی سطح

سیلندر اگر در $x \rightarrow -\infty$ فشار نسبی، صفر بوده و جریان یکنواخت وجود داشته باشد.

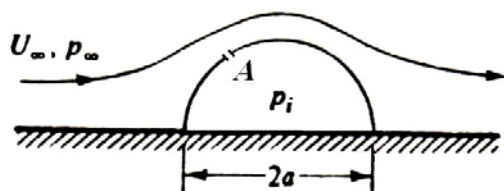
۵-۸- توضیح دهید اگر جریان حقیقی هوا اطراف استوانه با سیرکولاسیون وجود داشته باشد،

چه تفاوتی با جریان سیال ایده آل در مسئله قبل خواهد داشت؟ در صورت وجود

جریان آب، اطراف استوانه با سیرکولاسیون با حالت جریان هوا چه تفاوتی پیش خواهد

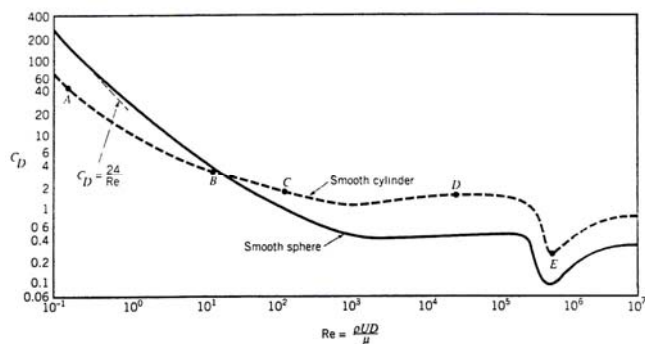
آمد؟

۹-۵- یک نیم استوانه طویل به قطر $2a$ مطابق شکل زیر روی یک سطح افقی قرار گرفته است و جریان هوا از چپ به راست می‌گذرد. فرض می‌کنیم جریان هوا را می‌توان معادل جریان سیال ایده آل (غیر چرخشی) فرض کرد. اگر در نقطه A بخواهیم سوراخی ایجاد کنیم تا فشار P_i داخل نیم استوانه برابر فشار خارج در آن نقطه باشد محل این سوراخ کجا باید باشد تا بر اساس تئوری بدون لزجت، برآیند نیروی وارد بر نیم استوانه صفر شود؟ یعنی برآیند نیروی ناشی از توزیع فشار بر واحد طول در روی نیم استوانه با نیروی ناشی از فشار P_i داخل آن برابر گردد.



شکل ۱۹-۵: مربوط به تمرین ۹-۵

۱۰-۵- نمودار شکل زیر ضریب دراگ در استوانه و کره با سطوح صیقلی را بر حسب عدد رینولدز نشان می‌دهد. با توجه به مبحث جریان حقیقی اطراف استوانه در بخش ۵-۵ دلایل تغییرات ضریب درگ در روی استوانه مطابق منحنی خط چین را توضیح دهید.

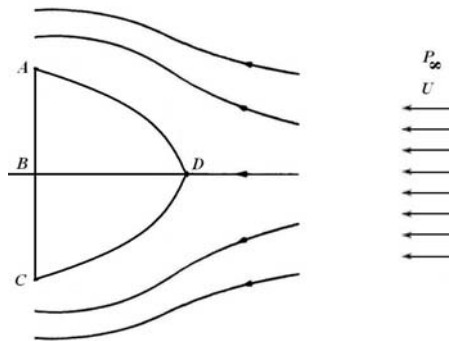


شکل ۲۰-۵: مربوط به تمرین ۱۰-۵

۱۱-۵- پایه یک پل با به کار بردن شکلی (خط جریان میانی $\psi = 0$) برای جریانی که ترکیبی از

یک چشمه به شدت Q و جریان یکنواخت U در جهت منفی محور X به دست می آید

طرح شده است.



شکل ۵-۲۱: مربوط به تمرین ۵-۱۱

الف- نشان دهید در صورتی که جریان رودخانه سرعت U به طرف پایه داشته باشد تغییرات فشار در روی محیط پایه از رابطه زیر به دست می آید.

$$P = 1/2 \rho U^2 \left[\frac{\sin 2\theta}{\theta} - \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \right]$$

ب- چنانچه سطح مقطع پل به خط سیالی $\psi = 0$ و زوایای $\theta = \frac{3\pi}{4}$ محدود باشد ابعاد ABC و BD نشان داده شده در شکل را محاسبه کنید، در صورتی که $Q = 20 \text{ m}^3 / \text{m} \cdot \text{sec}$ و $U = 120 \text{ m/sec}$ باشد.

ج- توضیح دهید در چه سرعتی از جریان، امکان کاویتاسیون روی پایه پل وجود دارد؟

۱۲-۵- یک سیلندر با قطر 0.61 m با سرعت دورانی 480 دور در دقیقه در جریان یکنواخت

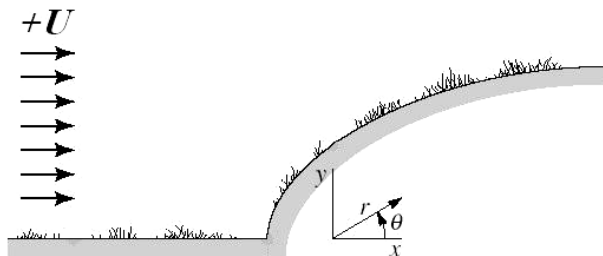
هوا با سرعت $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ می چرخد. محاسبه کنید نیروی برآ وارد بر طول 10 m سیلندر را

اگر جرم مخصوص هوا $1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ باشد.

۱۳-۵- در شکل زیر یک تپه طویل که سطح دشت به شکل نیم بدنه دو بعدی ارتفاع می گیرد

نشان داده شده است. اگر تابع جریان یکنواخت افقی $\psi_1 = \pm U r \sin \theta$ و تابع جریان

چشمه یا چاه $\psi_2 = \pm m \theta$ باشد و جریان هوا با سرعت $\pm U$ در حال وزیدن باشد،



شکل ۵-۲۲: مربوط به تمرین ۵-۱۳

الف- اگر جریان را بتوان پتانسیل (غیر چرخشی) فرض کرد و جهت جریان از چپ به راست باشد، تابع جریان و تابع پتانسیل این جریان و معادله مشخص کننده خط جریان نیم بدنه (تپه) را به دست آورید و به صورت ترسیمی با ترکیب جریان موازی و چشمه، چند نقطه از یک خط جریان نیم بدنه را مشخص کنید. دو خط جریان قبل از تپه و روی آن را رسم کنید و توزیع تقریبی فشار روی تپه را مشخص نمایید.

ب- اگر جریان حقیقی باد را در نظر بگیریم و اثرات لزجت هوا را منظور کنیم، در این حالت شکل دو خط جریان قبل از تپه و روی آنرا رسم کنید و توزیع سرعت و فشار و توزیع تنش برشی را در چند منطقه روی سطح تپه مشخص کنید و در مورد اختلاف این حالت و حالت قبل توضیح دهید. آیا حالت (الف) می تواند مدل خوبی برای این جریان باشد؟

۵-۱۴- در صورتی که در شکل مسئله قبل، جریان هوا از راست به چپ یعنی از طرف تپه به

دشت باشد، در این حالت تابع جریان برای به دست آوردن شکل تپه از ترکیب کدام

جریانها به دست می آید؟ چند خط جریان ، و توزیع فشار و توزیع تنش برشی و شکل

تقریبی لایه مرزی را در این حالت رسم کنید. توضیح دهید که آیا مدل جریان پتانسیل

می تواند مدل خوبی برای این جریان حقیقی باشد یا نه؟

فصل ششم

مقدمه ای بر جریان سیال حقیقی و معادلات ناویر استوکس

۶-۱- معادله حرکت و بررسی نیروهای وارد بر المان سیال

در فصول قبل مشاهده نمودیم که کاربرد رابطه مقدار حرکت خطی برای المان جزء یک حجم کنترل، در هر لحظه منجر به رابطه قانون دوم نیوتن برای جرم داخل حجم کنترل می شود. این رابطه برای المان جزء سیستم به جرم δm ، به صورت زیر می باشد:

$$\delta \vec{F} = \frac{D(\vec{V} \delta m)}{Dt} \quad (۶-۱)$$

که $\delta \vec{F}$ برآیند تمام نیروهایی است که روی δm اثر می کنند. با کاربرد روش سیستم δm را می توان ثابت فرض کرد، بنابراین داریم:

$$\delta \vec{F} = \delta m \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

که $\frac{D\vec{V}}{Dt}$ شتاب المان یا $\vec{a}$ می باشد، پس:

$$\delta \vec{F} = \delta m \vec{a} \quad (۶-۲)$$

برای المان حجم $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ به عنوان حجم کنترل نیز می توان نشان داد که معادله مقدار حرکت خطی به رابطه فوق منجر می گردد و از رابطه بین المان جرم و المان حجم نتیجه می شود:

$$\delta \vec{F} = \delta m \vec{a} = \rho \delta V \vec{a} \quad (۶-۳)$$

۶-۲- انواع نیروهای وارد بر المان سیال

به طور کلی دو نوع نیرو را باید در نظر گرفت: نیروی سطحی^۱ که بر سطح خارجی المان جزء وارد می شود مثل نیروی ناشی از فشار و همچنین نیروهای ناشی از تنش های برشی. نیروی سطحی را می توان جزء به عنوان نیروهای خارجی^۲ در نظر گرفت. نیروی حجمی (بدنی)^۳ که به تمام ذرات المان وارد می شود، مثل نیروهای ثقل و همچنین نیروهای الکترواستاتیک و الکترو مغناطیس. نیروی بدنی را می توان جزء نیروهای داخلی^۴ در نظر گرفت، در سیالات، اغلب فقط نیروی بدنی ثقل (وزن) موجود است:

$$\delta F_b = \delta m \cdot g \quad (۴-۶)$$

و اگر جهت قائم به طرف بالا را مثبت بگیریم نیروهای ثقل به صورت $-\rho \vec{g} dV$ می شوند که $\vec{g}$ بردار شتاب ثقل و $dV = dx dy dz$ المان حجم است.

$$\delta \vec{F}_b = -\delta m \vec{g} = -\rho \vec{g} dx dy dz$$

بنابراین:

$$\delta \vec{F}_b = -\rho \vec{g} dV \quad (۵-۶)$$

و مولفه های نیروی ثقل عبارتند از:

$$\delta F_x = \delta m g_x \quad (۶-۶)$$

$$\delta F_y = \delta m g_y \quad (۷-۶)$$

$$\delta F_z = \delta m g_z \quad (۸-۶)$$

که g_x ، g_y و g_z مولفه های شتاب ثقل در جهات x ، y و z می باشند. نیروی ثقل بر واحد حجم، به صورت $\vec{f}_b = \rho \vec{g}$ نشان داده می شود. معمولاً مولفه های نیروی حجمی برای واحد حجم در جهات x ، y و z را به ترتیب با X ، Y و Z نیز نشان می دهند، پس:

$$\vec{f}_b = X \hat{i} + Y \hat{j} + Z \hat{k} = \rho \vec{g} = \rho g_x \hat{i} + \rho g_y \hat{j} + \rho g_z \hat{k} \quad (۹-۶)$$

نیروی سطحی بستگی به تنش روی سطح دارد که آن هم رابطه با نرخ کرنش سیال دارد، دیدیم که این نرخ کرنش با تغییرات سرعت ایجاد می شود و این سیستم نیروها با وضع تنش ها مشخص

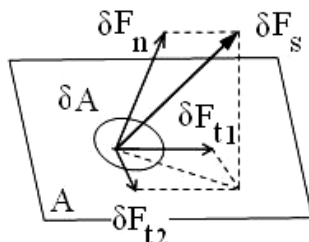
¹ Surface force

² External force

³ Body force

⁴ Internal force

می‌شود. نیروی سطحی در نتیجه عمل متقابل محیط بر المان وارد می‌شود. در هر نقطه از سیال، نیروی وارد بر مساحت جزء δA را که در یک سطح اختیاری قرار دارد با δF_s نشان می‌دهیم.



شکل ۶-۱: نیروهای وارد بر یک المان سیال

در حالت کلی δF_s نسبت به سطح مورب است و مطابق شکل می‌توان آن را به دو مولفه δF_n در امتداد عمود بر سطح و δF_t موازی (مماس) با سطح تقسیم کرد. البته مولفه موازی (مماس) با سطح را نیز می‌توان به دو مولفه δF_{t1} و δF_{t2} موازی با دو محور عمود بر هم 1 و 2 تقسیم کرد. بر این اساس سه مولفه نیروی δF_{t1} و δF_{t2} و δF_n به ترتیب در امتداد سه محور عمود بر هم 1 و 2 و n می‌باشند، که δF_{t1} و δF_{t2} عمود به یکدیگر در امتداد سطح δA و δF_n عمود بر سطح مذکور خواهد بود.

در سیستم مختصات کارتزین نیروهای سطحی بر واحد حجم f_s ، به سه مولفه f_{sx} و f_{sy} و f_{sz} تجزیه می‌شوند:

$$\vec{f}_s = f_{sx} \hat{i} + f_{sy} \hat{j} + f_{sz} \hat{k} \quad (۶-۱۰)$$

بدین ترتیب برآیند نیروهای حجمی و سطحی در واحد حجم، طبق قانون نیوتن به صورت زیر است:

$$f = f_b + f_s = \rho \frac{DV}{Dt} \quad (۶-۱۱)$$

نیروی سطحی در اثر تنش در آن سطح می‌باشد و شدت نیرو در هر نقطه روی سطح، متناسب با

تنش در آن نقطه می‌باشد. به طور کلی تنش بر سطح δA به صورت $\tau = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta A}$ تعریف می‌شود،

که در هر صفحه و بر هر نقطه سه مولفه تنش وارد می‌شود؛ یکی عمود بر صفحه که تنش عمودی^۱

وارد بر صفحه δA بوده و به صورت $\sigma_n = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_n}{\delta A}$ تعریف می‌شود و دو تنش برشی^۲ که با

روابط زیر تعریف می‌شوند:

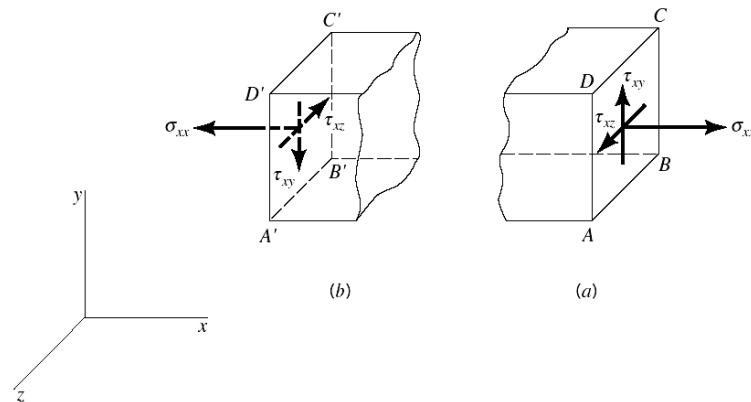
^۱ Normal stress

^۲ Shear stress

$$\tau_1 = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_1}{\delta A} \quad (۱۲-۶)$$

$$\tau_2 = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_2}{\delta A} \quad (۱۳-۶)$$

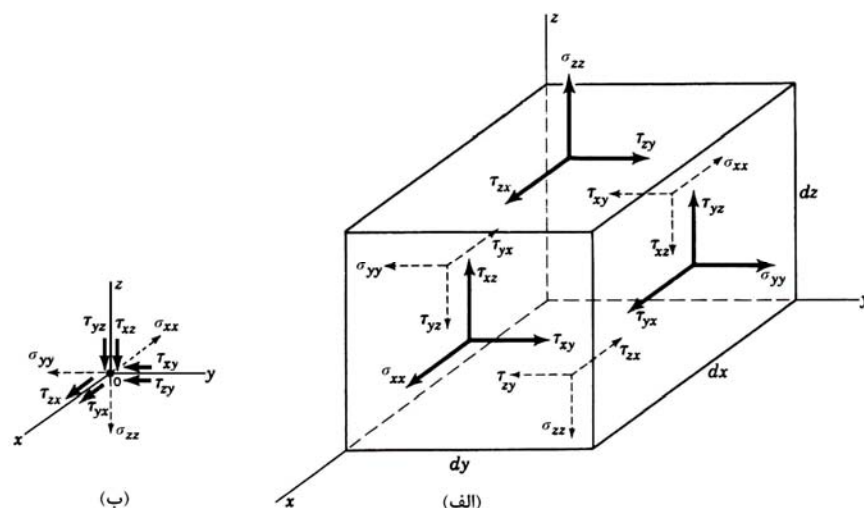
معمولاً برای تنش عمودی از علامت σ و برای تنش برشی از علامت τ استفاده می کنیم. اگر وضعیت سطح مشخص باشد به منظور تجزیه و تحلیل، معمولاً ساده تر است که سطح را در یک سیستم مختصات بررسی کنیم. مثلاً مطابق شکل (۶-۲) در صفحه $ABCD$ که عمود بر محور x می باشد تنش عمودی با σ_{xx} و تنش های برشی با τ_{xy} و τ_{xz} نشان داده شده اند. برای اینکه به آسانی بتوان هر مولفه خاص تنش را تشخیص داد، آن را با دو زیرنویس مشخص می کنیم که زیرنویس اول امتداد عمود بر صفحه ای را که تنش بر آن وارد می شود مشخص می کند و زیرنویس دوم امتداد مولفه تنش را معلوم می سازد. پس تنش های عمودی زیرنویس های یکسانی دارند ولی تنش های برشی دو زیرنویس متفاوت دارند. تنش های وارد بر سطح در صورتی مثبت هستند که بردار نرمال سطح و بردار مولفه تنش، هر دو یا در جهت مثبت محورهای مختصات باشند و یا هر دو در جهت منفی محورهای مختصات باشند. به عنوان مثال تمام تنش های نشان داده شده در شکل (۶-۲) مثبت می باشند.



شکل ۶-۲: تنش های وارد بر صفحه موازی صفحه $x-y$

در اینجا باید تاکید کنیم که وضعیت تنش در یک نقطه از یک ماده را نمی توان فقط با سه مولفه بردار تنش در روی یک صفحه معلوم کرد. زیرا بردار تنش هر نقطه در صفحه بستگی به طرز قرار گرفتن صفحه ای دارد که از آن نقطه می گذرد و می توان تعداد بی شماری صفحه از هر نقطه

گذراند. اگر چه می توان نشان داد که برای سیال همسانگرد^۱ که غالب سیالات همگنی که با آن سر و کار داریم چنین می باشند (سیالی که در آن رابطه تنش ها با نرخ کرنش در همه جهات یکسان است) تنش های عمودی و برشی در هر نقطه را می توان روی سه صفحه عمود بر هم که از نقطه می گذرد، مشخص کرد. پس وضعیت تنش در هر نقطه با تنش های وارد بر سه صفحه عمود بر هم در آن نقطه، مثلاً صفحات Z و Y و X موازی با سه صفحه $X-Y$ و $X-Z$ و $Y-Z$ مشخص می شود.



شکل ۳-۶: (الف) تنش های وارد بر سطوح یک المان، (ب) تنش های وارد بر یک نقطه در سیال

در هر نقطه بر روی هر صفحه سه مولفه تنش وارد می شود، یکی عمود بر صفحه (تنش عمودی) و دو تا موازی صفحه (تنش برشی). چون در هر نقطه برای مشخص کردن وضع تنش باید تنش وارد بر سه صفحه عمود بر هم را در نظر بگیریم، پس نه مولفه تنش در هر نقطه معرف وضعیت تنش آن نقطه می باشد و کمیت تنش با نه مولفه مشخص می شود. می دانیم که کمیت اسکالر (تانسور درجه صفر) با $3^0 = 1$ مقدار و کمیت برداری (تانسور درجه یک) با $3^1 = 3$ مقدار معلوم می شود و تانسور درجه دو با $3^2 = 9$ مقدار معلوم می شود پس تنش، کمیتی از نوع تانسور درجه دو است که معمولاً به اختصار بدان تانسور اتلاق می کنند.

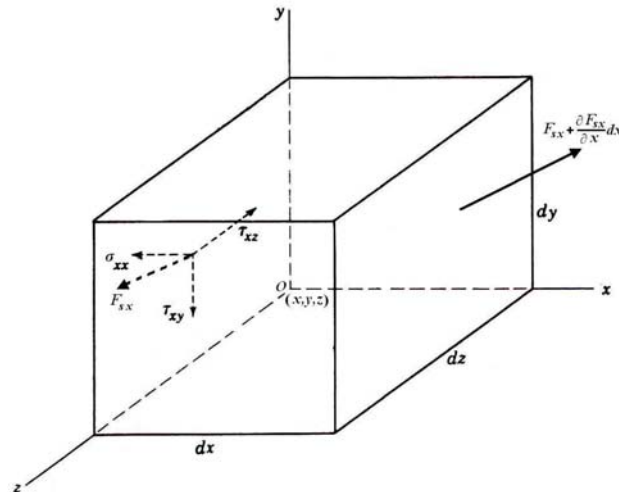
تانسور تنش را که ماتریس تنش نیز می گویند، می توان به صورت ماتریسی زیر نشان داد:

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (۴-۱)$$

¹ Isotropic

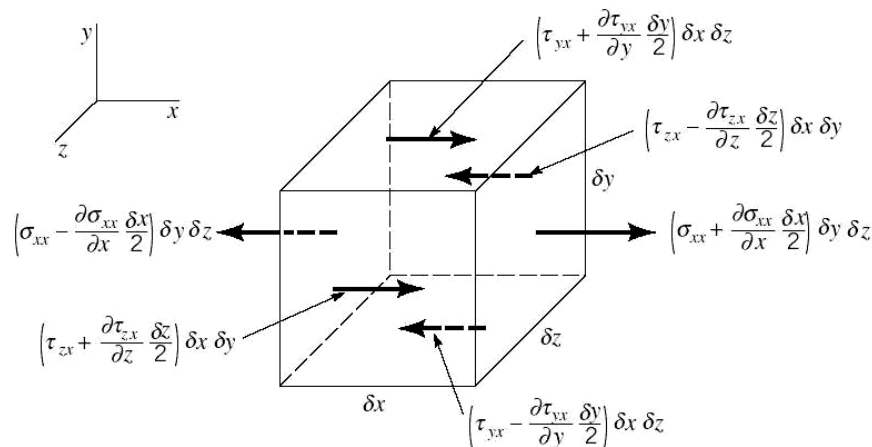
۳-۶- تنش های وارد بر یک المان سیال

یک المان مکعب مستطیل به حجم $dV = dx dy dz$ را در یک لحظه از تمام سیال اطراف مطابق شکل (۶-۴) در نظر می گیریم که یک گوشه پائینی آن در نقطه $O(x, y, z)$ قرار دارد. نیرو از نقطه ای به نقطه دیگر تغییر می کند و تغییرات نیرو را در امتداد محورها در مرکز سطح در نظر می گیریم. در اینجا فقط نیروهای وارد بر سطوح عمود بر محور x نشان داده شده اند.



شکل ۶-۴: یک المان مکعب مستطیل سیال

در شکل (۶-۵) به جای نیروهای سطحی وارد بر المان کوچک مکعب شکل سیال، حاصلضرب تنشها در سطوحی که بر آنها وارد می شوند، نشان داده شده است. تنش از هر نقطه به نقطه دیگر تغییر می کند که تغییرات تنشها را در امتداد هر محور برای تنش روی سطوح (در مرکز سطح) در نظر می گیریم. برای سادگی و شلوغ نشدن در شکل فقط نیروهای وارد در امتداد x نشان داده شده است.



شکل ۶-۵: نیروهای سطحی اعمال شده در راستای x بر المان کوچک مکعب مستطیل سیال

حاصلضرب تنش متوسط در مساحت برابر با نیرو می شود. با جمع کردن تمام نیروها در امتداد x داریم:

$$\delta F_{sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (۱۵-۶)$$

و به همین ترتیب نیروی برآیند در جهات دیگر را می توان به دست آورد:

$$\delta F_{sy} = \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (۱۶-۶)$$

$$\delta F_{sz} = \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (۱۷-۶)$$

نیروی کل سطحی وارد بر المان δF_s می شود:

$$\vec{\delta F_s} = \delta F_{sx} \hat{i} + \delta F_{sy} \hat{j} + \delta F_{sz} \hat{k} \quad (۱۸-۶)$$

نیروی کل وارد بر المان به صورت $\delta F = \delta F_s + \delta F_b$ است و نیروی کل بر واحد حجم $\delta \nabla$ برابر با

$$\vec{\delta f} = \frac{\delta F}{\delta \nabla} = \delta f_b + \delta f_s \text{ خواهد بود.}$$

۶-۴- معادله حرکت

از روابط مقدار حرکت خطی در جهات x و y و z برای نیروهای سطحی داریم:

$$\delta \vec{F_s} = \delta m \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \delta F_{sx} = \delta m a_x = \delta m \frac{Du}{Dt} \\ \delta F_{sy} = \delta m a_y = \delta m \frac{Dv}{Dt} \\ \delta F_{sz} = \delta m a_z = \delta m \frac{Dw}{Dt} \end{cases} \quad (۱۹-۶)$$

و نیروهای حجمی (بدنی) به صورت زیر است:

$$\delta \vec{F_b} = \delta m \vec{g} \Rightarrow \begin{cases} \delta F_{bx} = \delta m g_x \\ \delta F_{by} = \delta m g_y \\ \delta F_{bz} = \delta m g_z \end{cases} \quad (۲۰-۶)$$

با توجه به برآیند نیروهای حجمی یا بدنی بر واحد حجم ($\mathcal{F}_b$) و نیروهای سطحی بر واحد حجم ($\mathcal{F}_s$) و با توجه به روابط اندازه حرکت، معادله حرکت در جهات مختلف به صورت زیر است:

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (۶-۲۱)$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (۶-۲۲)$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (۶-۲۳)$$

اگر فشار ترمودینامیکی را از تنش های عمودی جدا کنیم و بنویسیم $\sigma_{xx} = \tau_{xx} - p$ و $\sigma_{yy} = \tau_{yy} - p$ و $\sigma_{zz} = \tau_{zz} - p$ نتیجه می شود:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) = \rho \frac{du}{dt} \quad (۶-۲۴)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) = \rho \frac{dv}{dt} \quad (۶-۲۵)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) = \rho \frac{dw}{dt} \quad (۶-۲۶)$$

معادلات حرکت پیوسته صادق هستند، اگر چه قبل از این که بتوانیم از آنها برای حل مسائل خاصی استفاده کنیم باید اطلاعات دیگری در رابطه با تنش ها به دست آوریم؛ در غیر این صورت تمام تنشها و جرم مخصوص و مولفه های سرعت را به صورت مجهول خواهیم داشت و تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات می باشد. در جامدات، نه ترم قسمت شتاب جابجایی $[(V \cdot \nabla)V]$ سمت راست معادلات حرکت صفر می شود و تنشها فقط با کرنش رابطه دارند، لذا تعجب نباید کرد که چرا معادلات جریان سیال بسیار مشکل است، چون می خواهیم حرکت پیچیده جریان سیال را تجزیه و تحلیل کنیم.

اگر h را جهت قائم در نظر بگیریم، برای بردار نیروی شتاب جاذبه در واحد جرم داریم:

$$\bar{g} = -\nabla(gh) \quad (۶-۲۷)$$

پس به طور کلی مولفه های نیروی وزن بر واحد جرم عبارتند از:

$$g_x = -\frac{\partial(gh)}{\partial x} \quad (۶-۲۸)$$

$$g_y = -\frac{\partial(gh)}{\partial y} \quad (۶-۲۹)$$

$$g_z = -\frac{\partial(gh)}{\partial z} \quad (۶-۳۰)$$

در معادله حرکت که به صورت ترم های زیر نوشته شده است:

$$\rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (۳۱-۶)$$

در حالت خاص که سیال غیر لزج باشد، تمام تنش های برشی صفر می شوند و دیدیم که در این صورت تنش های عمودی از هر جهت برابرند: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ ، و مقدار آنها برابر فشار ترمودینامیکی در آن نقطه با علامت منفی است.

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p \quad (۳۲-۶)$$

و معادله حرکت و روابط ناویر استوکس تبدیل به روابط اوایلر می شود:

$$\rho \vec{g} - \nabla p = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] \quad (۳۳-۶)$$

تانسور تنش یا ماتریس تنش برابر است با:

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (۳۴-۶)$$

از تعادل لنگرها برای هر المان می توان نشان داد که در حد وقتی ابعاد المان به سمت صفر میل می کند در هر نقطه وقتی $i \neq j$ باشد $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ یعنی تانسور تنش متقارن می باشد. مثلاً اگر المان

حول محور Z با سرعت زاویه ای ω_z دوران داشته باشد و شتاب لحظه ای زاویه ای $\dot{\omega}_z$ باشد:

$$dI \cdot \dot{\omega}_z = \left[\tau_{yz} (dx dz) \frac{dy}{2} - \tau_{xy} (dy dz) \frac{dx}{2} \right] - \left[\tau_{yx} (dz dx) \frac{dy}{2} - \tau_{xy} (dx dz) \frac{dy}{2} \right] \quad (۳۵-۶)$$

چون dI تابعی از توان پنجم ابعاد المان بوده و حجم، تابعی از توان سوم ابعاد المان است، وقتی ابعاد المان، به سمت صفر میل کند dI نسبت به حجم قابل اغماض است و

$$dx dy dz \left[\frac{1}{2} (\tau_{yx} - \tau_{yx}) - \frac{1}{2} (\tau_{xy} - \tau_{xy}) \right] = 0$$

حول محورهای X و Y بنویسیم نتیجه می شود که $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ و $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ پس تانسور تنش متقارن است.

۶-۵- معادلات حرکت در جریان سیال نیوتنی حقیقی تراکم ناپذیر

زمانی به یک سیال همسانگرد (ایزوتروپ) می گوئیم که رابطه میان مولفه های تنش و نرخ کرنش در تمام جهات یکسان باشد و زمانی به سیال نیوتنی می گوئیم که این رابطه خطی باشد یعنی وقتی که سیال از قانون اصطکاک استوکس پیروی نماید.

ملاحظه شد که یک المان سیال را مورد بررسی قرار دادیم و در معادله حرکت، تمام نیروها را که برآیند نیروهای سطحی و حجمی بر واحد حجم است در نظر گرفتیم و با توجه به اینکه $\sigma_{xx} = \tau_{xx} - p$ و $\sigma_{yy} = \tau_{yy} - p$ و $\sigma_{zz} = \tau_{zz} - p$ داریم:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (۳۶-۶)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (۳۷-۶)$$

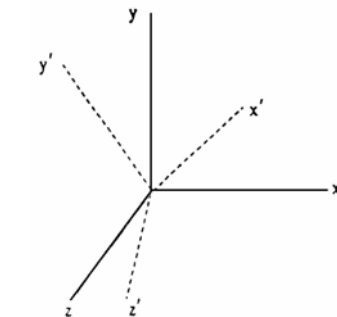
$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \quad (۳۸-۶)$$

همان طور که مشاهده می گردد، سه معادله و در کل ۹ مولفه تنش و ۳ مولفه سرعت داریم. حال اگر سیال غیر لزج باشد τ_{ij} صفر می شود و $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma = -P$ که فشار هیدرواستاتیکی می باشد. در حالت کلی برای سیال حقیقی باید تنش ها را بر اساس مولفه های سرعت یا فشار پیدا کرد تا حل معادلات حاصل گردد. حال اگر به طور دقیق به مساله نگاه نماییم، می بینیم که مساله در یک محیط پیوسته می باشد. تئوری محیط پیوسته به ارتباط تنش ها و سرعت ها می پردازد. اگر سیال لزج باشد، ۹ مولفه تنش خواهیم داشت و این تنش ها، تانسور مقارنی را تشکیل می دهد. اگر خواص یک نقطه را نسبت به مختصات متعامد بنویسیم داریم:

$$I_{\sigma 1} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} + \sigma_{z'z'} \quad (۳۹-۶)$$

$$I_{\sigma 2} = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yx}^2 - \tau_{zy}^2 \\ = \sigma_{x'x'}\sigma_{y'y'} + \sigma_{y'y'}\sigma_{z'z'} + \sigma_{z'z'}\sigma_{x'x'} - \tau_{x'y'}^2 - \tau_{y'x'}^2 - \tau_{z'y'}^2 \quad (۴۰-۶)$$

که این ها، پایا^۱های عددی تنش می باشد.



شکل ۶-۱: دستگاههای مختصات تغییر تنش

¹ Invariant

تنش هایی که بر المان سیال وارد می شود باعث ایجاد نیرو می گردد؛ که این نیرو به تغییر شکل، تغییر مکان و تغییر زاویه منجر می گردد. اگر تنش داشته باشیم کرنش نیز داریم، کرنش ها نیز یک تانسور را تشکیل می دهند. در سیالات معمولاً نرخ کرنش ها اهمیت دارند، همانند تنش ها، برای نرخ کرنش ها نیز می توان نشان داد:

$$\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz} = \dot{\epsilon}_{x'x'} + \dot{\epsilon}_{y'y'} + \dot{\epsilon}_{z'z'} \quad (۴۱-۶)$$

نرخ کرنش ها به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (۴۲-۶)$$

که اینها نرخ کرنش های طولی می باشند و نرخ کرنش های زاویه ای به صورت زیر است:

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (۴۳-۶)$$

$$\dot{\epsilon}_{yz} = \dot{\epsilon}_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (۴۴-۶)$$

$$\dot{\epsilon}_{xz} = \dot{\epsilon}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (۴۵-۶)$$

در جامدات همگن الاستیک، تنش و کرنش رابطه خطی دارند، مشابه این مطلب می توان سیالی را در نظر گرفت که چنین خاصیتی را در مورد تنش و نرخ کرنش داشته باشد، یعنی در آن رابطه تنش و نرخ کرنش خطی باشد. حال اگر بخواهیم خواص این سیال را مرور کنیم، با ید بگوییم:

۱- مولفه های تنش را می توان به صورت تابع خطی نرخ کرنش بیان کرد.

۲- رابطه بین مولفه های تنش و نرخ کرنش نسبت به تبدیل محورها غیر قابل تغییر (پایا)^۱ می باشد.

۳- مولفه های تنش در هنگامی که سرعت ها صفر باشد تبدیل به فشار هیدرواستاتیکی می گردد.

۴- سیال مورد بررسی همسو (همگن) است.

مثلاً:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = C_{41}\dot{\epsilon}_{xx} + C_{42}\dot{\epsilon}_{yy} + C_{43}\dot{\epsilon}_{zz} + C_{44}\dot{\epsilon}_{xy} + C_{45}\dot{\epsilon}_{yz} + C_{46}\dot{\epsilon}_{xz} \quad (۴۶-۶)$$

چون نرخ کرنش های زاویه ای دو به دو برابرند و ۶ ضریب وجود دارد که به صورت خطی با ۶ تنش مستقل مربوط می گردد، با این حساب ۳۶ ضریب خواهیم داشت:

$$C_{11}, C_{12}, \dots, C_{36}$$

که می توان نشان داد ۳۳ تای آنها صفر می شوند و با توجه به تقارن خواهیم داشت:

$$\mu = \frac{C_{44}}{2} \quad (۴۷-۶)$$

¹ Invariant

$$C_{11} = C_{44} + C_{12} \quad (۴۸-۶)$$

$$C_{12} = \mu' \quad (۴۹-۶)$$

$$C_{11} = 2\mu + \mu' \quad (۵۰-۶)$$

لذا با توجه به این مطالب داریم:

$$\sigma_{xx} = -P + 2\mu \dot{\epsilon}_{xx} + \mu'(\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz}) \quad \tau_{xy} = 2\mu \dot{\epsilon}_{xy} \quad (۵۱-۶)$$

$$\sigma_{yy} = -P + 2\mu \dot{\epsilon}_{yy} + \mu'(\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz}) \quad \tau_{xz} = 2\mu \dot{\epsilon}_{xz} \quad (۵۲-۶)$$

$$\sigma_{zz} = -P + 2\mu \dot{\epsilon}_{zz} + \mu'(\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz}) \quad \tau_{yz} = 2\mu \dot{\epsilon}_{yz} \quad (۵۳-۶)$$

ضرایب μ و μ' به جنس سیال بستگی دارند. برای سیال غیر قابل تراکم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (۵۴-۶)$$

برای سیالات معمولی تراکم ناپذیر می توان نشان داد که:

$$\mu' = -\frac{2}{3}\mu \quad (۵۵-۶)$$

۶-۶- معادلات ناویر استوکس

برای سیالات نیوتنی که تنش ها با نرخ کرنش رابطه ای خطی دارند، معادلات بقای اندازه حرکت خطی به معادلات ناویر استوکس معروفند. این معادلات، تنها برای سیال نیوتنی صادق است.

۶-۶-۱- رابطه بین تنش و نرخ کرنش

برای سیال نیوتنی غیر قابل تراکم می توان نشان داد که روابط خطی تنش ها با نرخ کرنش ها به صورت زیر می باشد. در سیستم مختصات کارتزین برای تنش های عمودی داریم:

$$\sigma_{xx} = -P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{و} \quad \sigma_{yy} = -P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{و} \quad \sigma_{zz} = -P + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (۵۶-۶)$$

و برای تنش های برشی داریم:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad \text{و} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \text{و} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (۵۷-۶)$$

همان طور که در جامدات قانون هوک تنش را به کرنش مربوط می کند در سیال نیوتنی روابط فوق تنش را به نرخ کرنش ربط می دهند.

در این روابط P فشار است که برابر منفی متوسط تنش های عمودی در هر نقطه است و آن را فشار مکانیکی نیز می گویند.

$$-P = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (۵۸-۶)$$

همان طور که قبلا گفتیم در سیال ساکن و در جریان سیال غیر لزج، فشار در همه جهات یکسان بوده و تنش برشی صفر است؛ ولی در جریان لزج، تنش عمودی در جهات مختلف یکسان نیست و فشار را منفی متوسط سه تنش عمودی در هر نقطه می گیرند (فشار مکانیکی). در اکثر موارد، این فشار برابر فشار ترمودینامیک در آن نقطه است به جز در فشارهای نزدیک به فشار بحرانی. روابط تنش و نرخ کرنش در جریان سیال نیوتنی در سیستم مختصات استوانه ای به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -P + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ \sigma_{\theta\theta} = -P + 2\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right] \\ \sigma_{zz} = -P + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \\ \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] \\ \tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \end{cases} \quad (۵۹-۶)$$

برای تنش ها در روابط بالا نیز زیرنویس اول، امتداد عمود بر صفحه ای است که تنش بر آن وارد می شود و زیرنویس دوم امتداد مولفه تنش است.

۶-۶-۲- بدست آمدن معادلات ناویر استوکس از معادلات حرکت

روابط تنش و نرخ کرنش سیال نیوتنی غیر قابل تراکم را در معادلات حرکت منظور می کنیم، پس از ساده کردن روابط، معادلات حرکت در سیستم مختصات کارتزین به صورت زیر در می آیند.

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad (۶۰-۶)$$

این معادلات برای سیالات نیوتنی که تنش ها با نرخ کرنش رابطه ای خطی دارند به معادلات ناویر استوکس معروف است و تنها برای سیال نیوتنی صادق است. این سه معادله (بقاء مقدار حرکت خطی) همراه با معادله پیوستگی (بقاء جرم) می تواند به طور ریاضی، جریان غیر قابل تراکم سیال نیوتنی را کاملاً تشریح کند. μ و ρ در جریان غیر قابل تراکم با درجه حرارت ثابت مقادیر ثابتی می باشند. چهار مجهول (سه مولفه سرعت و یک مولفه فشار) داریم که با سه معادله فوق و معادله پیوستگی قابل حل هستند. در جریان لایه ای سیال حقیقی برای چند حالت ساده، حل تحلیلی وجود دارد و برای بقیه حالت ها می توان حل عددی پیدا کرد.

متأسفانه به خاطر پیچیدگی معادلات کلی ناویر استوکس، که معادلات دیفرانسیل درجه دوم غیر خطی می باشند، در جریان سیال لزج، به جز در موارد ساده، در اکثر موارد حل دقیق وجود ندارد. در موارد ساده ذکر شده که حل دقیق معادلات به دست آمده است ضمن مقایسه با نتایج تجربی، تطبیق کاملی بین نتایج مشاهده شده است. لذا معادلات ناویر استوکس به طور کلی به عنوان معادلات دیفرانسیل حاکم در حرکت جریان غیر قابل تراکم سیال نیوتنی به حساب می آیند. معمولاً معادلات NS^۱ در حالت توربولانس قابل حل نمی باشد، در توربولانس می توان برای سرعتها، از سرعت متوسط زمانی و همین طور برای فشار از فشار متوسط زمانی استفاده کرد. در معادلات NS مهم این است که حل های موجود با حالت عملی تطابق دارند. در خیلی موارد لازم است که این معادلات را در مختصات دیگر بررسی کرد. این روابط به صورت برداری به صورت زیر است:

$$\rho \left[\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V \right] = -\nabla P + \rho g + \mu \nabla^2 V \quad (۶-۶۱)$$

این روابط در مختصات استوانه ای به صورت زیر بیان می گردند:

در امتداد r :

$$\rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \quad (۶-۶۲)$$

در امتداد θ :

$$\rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \quad (۶-۶۳)$$

¹ Navier-Stokes equations

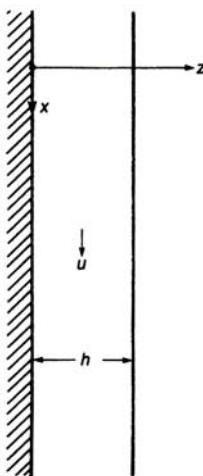
در امتداد z :

$$\rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \quad (6-64)$$

$$\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]$$

در جریانی که تنش برشی صفر باشد (مثل جریان غیر چرخشی یا جریان غیر لزج)، معادلات فوق تبدیل به معادلات اوایلر می شوند. در جریان دو بعدی غیر چرخشی برای پیدا کردن مجهولات u, P یا سرعتهای متناظر دیگر مثلاً مختصات قطبی، آسان تر است که تابع جریان را پیدا کنیم و با داشتن تابع جریان تمام اطلاعات از جمله شکل خطوط جریان و مولفه های سرعت به دست می آید و در نهایت نیز از رابطه برنولی، مقدار فشار حاصل می شود. در جریان دو بعدی غیر چرخشی دیدیم که تابع جریان و تابع پتانسیل حل معادلات لاپلاس می باشند و با حل این معادلات به صورت تحلیلی یا عددی، می توان اطلاعات لازم را برای جریان دو بعدی غیر چرخشی یا جریان پتانسیل به دست آورد.

مثال ۶-۱) مطابق شکل (۶-۷) برای جریان دائمی یکنواخت در روی یک سطح عمودی قائم، معادلات ناویر-استوکس را ساده کنید و با فرض اینکه سیال در اثر نیروی گرانش با ضخامت ثابت h روی این صفحه به طرف پایین جریان دارد، معادله توزیع سرعت را به دست آورید. فرض کنید تنش برشی روی سطح آزاد سیال صفر است و جریان در امتداد x یکنواخت است.



شکل ۶-۷: جریان به سمت پایین روی یک صفحه عمودی

حل -

در این مسئله می توان فرضهای زیر را در نظر گرفت:

۱- نیروی بدنی در جهت قائم x شامل شتاب جاذبه است و نیروهای بدنی در جهات z, y صفر هستند.

۲- جریان دائمی است، یعنی $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

۳- گرادیان فشار وجود ندارد.

۴- جریان فقط در جهت x وجود دارد و $v = w = 0$

۵- سرعت سیال فقط در جهت z تغییر می کند، $u = u(z)$ پس: $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du}{dz}$
با این فرضها معادلات ناویر- استوکس (۶-۵۹) به صورت زیر تعدیل می شود:

$$0 = \rho g_x + \mu \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)$$

با انتگرال گیری داریم:

$$\frac{du}{dz} = \frac{\rho g_x}{\mu} z + C_1$$

با انتگرال گیری مجدد داریم:

$$u = \frac{\rho g_x}{\mu} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

شرایط مرزی عبارتند از:

۱- شرط عدم لغزش ایجاب می کند که روی صفحه سرعت سیال صفر باشد:

$$u = 0 \text{ وقتی } z = 0$$

۲- با فرض اینکه مقاومت هوا قابل صرف نظر است، تنش برشی روی سطح آزاد، باید صفر باشد:

$$\frac{du}{dz} = 0 \text{ وقتی } z = h$$

با اعمال شرط مرزی ۲ و سپس شرط مرزی ۱ معادله توزیع سرعت، به دست می آید:

$$u = \frac{\rho g_x z}{2\mu} (2h - z)$$

تمرین های فصل ششم

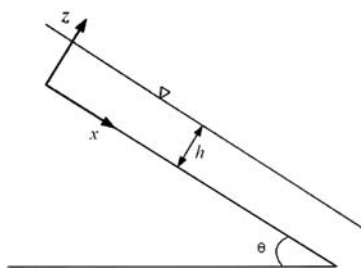
۱-۶- در روابط (۶-۳۹) و (۶-۴۰) دو پایای عددی تانسور تنش معرفی گردید. ضمن محاسبه مقادیر ویژه تانسور تنش بیان شده با رابطه (۶-۳۴) سومین پایای عددی تانسور تنش $I_{\sigma 3}$ را به دست آورید. پایاهای عددی تانسور کرنش، $I_{\epsilon 1}, I_{\epsilon 2}, I_{\epsilon 3}$ را بنویسید.

۲-۶- با توجه به رابطه تنش بر حسب کرنش، $\tau_{ij} = \lambda \Delta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$ که در آن $\Delta = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ دایلیشن است، نشان دهید همواره رابطه $\frac{1}{2} \tau_{ij} \epsilon_{ij} = (\frac{1}{2} \lambda + \mu) I_{\epsilon 1}^2 - 2\mu I_{\epsilon 2}$ برقرار است. $I_{\epsilon 1}$ ، $I_{\epsilon 2}$ پایاهای اول و دوم تانسور کرنش هستند.

۳-۶- توضیح دهید برای به دست آوردن معادلات ناویر-استوکس چه فرضیاتی لازم است. آنها را ذکر کنید.

۴-۶- از معادلات ناویر-استوکس چگونه و با چه شرایطی می توان به معادلات اوایلر و برنولی رسید؟ مراحل اثبات را بنویسید.

۵-۶- برای جریان دائمی یکنواخت در روی یک سطح شیبدار با زاویه θ معادلات ناویر-استوکس را ساده کنید و با فرض اینکه روغن با عمق ثابت روی این سطح شیبدار به طرف پایین جریان دارد، معادله توزیع سرعت را به دست آورید. تنش برشی روی سطح آزاد روغن را صفر در نظر بگیرید. نشان دهید معادله سرعت در حالت $\theta = 90^\circ$ به نتیجه مثال (۶-۱) می رسد.



شکل ۸-۶: جریان به سمت پایین روی یک سطح شیبدار

۶-۶- معادلات ناویر-استوکس زیر را برای جریان دائمی توسعه یافته لایه ای (لامینار) در بین دو صفحه بینهایت که به طور قائم قرار گرفته اند ساده نموده و پروفیل توزیع

سرعت جریان بین دو صفحه را بر حسب پارامترهای معلوم به دست آورید. فرض کنید در امتداد جریان، فشار تغییر نمی کند.

$$\frac{DV}{Dt} = \rho g - \nabla P + \mu \nabla^2 V$$

۶-۷- نشان دهید در مختصات استوانه ای روابط برداری زیر صادق است:

$$V \cdot \nabla = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

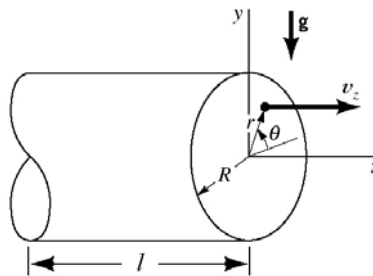
۶-۸- از رابطه ناویر- استوکس $\frac{DV}{Dt} = \rho g - \nabla P + \mu \nabla^2 V$ ، چگونه و با چه فرضیهایی می توان به روابط زیر رسید؟ مراحل کار را بنویسید.

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] = 0$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right]$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

۶-۹- در جریان لزج دائمی توسعه یافته لایه ای در یک لوله افقی مدور به شعاع R مطابق شکل، معادلات ناویر استوکس استوانه ای را ساده کرده و شرایط مرزی آن را مشخص کنید و روابط زیر را به دست آورید.

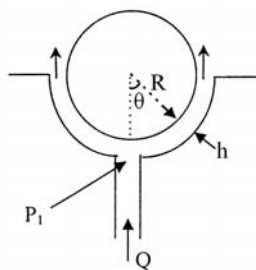


شکل ۶-۹: جریان لزج در یک لوله افقی

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) (r^2 - R^2)$$

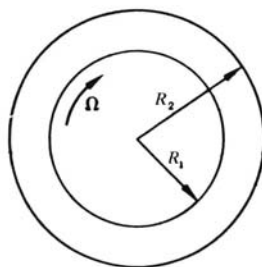
$$\Delta P = \frac{8\mu l Q}{\pi R^4}$$

۱۰-۶- یک سیلندر طویل به شعاع R توسط فشار و نیروی برشی که از حرکت سیال لزج در مجرای نشان داده شده در شکل حاصل می شود، شناور می ماند. اگر وزن سیلندر بر واحد طول W باشد، چه دبی از سیال لازم است تا سیلندر به صورت شناور باقی بماند؟



شکل ۱۰-۶: مربوط به تمرین ۱۰-۶

۱۱-۶- یک میله با مقطع دایره به شعاع R_1 و طول بینهایت با سرعت زاویه ای Ω داخل یک سیلندر ثابت هم مرکز با میله که شعاع آن R_2 و $R_2 > R_1$ می باشد دوران می کند. با فرض اینکه جریان دو بعدی است و سیال بین میله و سیلندر روغن غیر قابل تراکم با لزجت μ میباشد و میله زمان زیادی است که می چرخد و جریان دائمی است، نشان دهید $\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$ و $\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{dP}{dr}$ است و معادلات ناویر-استوکس را برای این جریان ساده کنید و توزیع سرعت v_θ و توزیع ورتیسیتی $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$ در میدان جریان و مقدار تنش برشی روی جدار سیلندر را به دست آورید.



شکل ۱۱-۶: مربوط به تمرین ۱۱-۶

فصل هفتم

توابع مختلط تحلیلی و جریان پتانسیل دو بعدی در صفحه

۷-۱- مقدمه

در این فصل، یک روش تحلیلی بسیار پر قدرت در به دست آوردن الگوی دو بعدی جریان پتانسیل یا غیر چرخشی معرفی می کنیم. این روش به طور گسترده ای برای انواع شرایط مرزی کاربرد دارد. این روش را نگاشت هم دیس یا تبدیل کانفرمال^۱ گویند. لازمه کاربرد آن دانستن اصول توابع مختلط می باشد. از روش نگاشت هم دیس یا تبدیل کانفرمال می توان دایره را به شکل های مختلف تبدیل کرد و جریان غیر چرخشی اطراف اجسام دو بعدی مختلف را به دست آورد. به عنوان مثال، با تبدیل جریان اطراف استوانه به شکل یک آیروفویل^۲ (برگه هوا) و نیز با اعمال سیرکولاسیون (با مقدار خاصی که نقطه سکون را به انتهای دم برگه هوا ببرد) می توان جریان حقیقی اطراف یک آیروفویل (برگه هوا) را با تقریب خوب به دست آورد و در نتیجه مقدار نیروی برآ را محاسبه کرد که این از اصول محاسبه و تئوری آیروفویل (بال هواپیما و پروانه هواپیما) و هیدروفویل^۳

^۱ Conformal mapping

^۲ Airfoil

^۳ Hydrofoil

(بالچه های کشتی و هیدروکرافت و پره های پمپ و توربین) می باشد. همچنین روش فوق در جریان دو بعدی داخل محیط متخلخل مثل حرکت آب در خلل و فرج خاک و یا نفوذ نفت در سنگهای متخلخل کاربرد دارد.

۷-۲- خلاصه ای درباره توابع مختلط و کاربرد آن در جریان سیال

متغیر مختلط بصورت:

$$z = x + iy = r[\cos \theta + i \sin \theta] = re^{i\theta} \quad (۷-۱)$$

می باشد که در آن:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (۷-۲)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (۷-۳)$$

تابع مختلط w را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$w = f(z) = \phi + i\psi = f_1(x, y) + if_2(x, y) \quad (۷-۴)$$

که ϕ قسمت حقیقی و ψ قسمت موهومی است، ϕ و ψ توابعی از x, y یا r, θ می باشند. باید به این نکته توجه داشت که در یک میدان جریان، هر نقطه دارای مقادیر x و y را می توان در صفحه xy روی z نشان داد و مقدار تابع پتانسیل و تابع جریان را پیدا کرد. در صفحه w مقدار $\psi = cte$ خط جریان موازی از چپ به راست می باشد. توجه به این نکته ضروری است که تعیین w برای ما مهم است. همان طور که گفتیم اگر ϕ و ψ در معادله لاپلاس صدق کند، جریان غیر چرخشی است. اگر جریان غیر چرخشی باشد، آن را تحلیلی گوئیم. توابع تحلیلی، توابعی می باشند که برای هر نقطه واقع در صفحه z فقط یک نقطه در صفحه w داشته باشیم و مقدار آن نیز بی نهایت نباشد. شرط دوم نیز این است که مشتق آن فقط یک مقدار (به جز صفر و بی نهایت) داشته باشد. تابع تحلیلی می تواند مشخصه جریان غیر چرخشی باشد. اگر شرایط کوشی-ریمان برقرار باشد، تابع تحلیلی است. شرایط کوشی-ریمان به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (۷-۵)$$

هر تابع تحلیلی $w = F(z)$ در صفحه w جریان یکنواخت است و در صفحه z الگوی یک جریان پتانسیل دو بعدی را مشخص می کند.

ممکن است تابع در یک جریان در چند نقطه خاص به نام نقاط منفرد، تحلیلی نباشد و در بقیه میدان تحلیلی باشد. در نقاط منفرد $\frac{dw}{dz}$ صفر یا بینهایت است.

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta w}{\delta z}$$

$$\delta w = \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y$$

$$\delta x = \delta r \cos \alpha$$

$$\delta y = \delta r \sin \alpha$$

$$\frac{\delta w}{\delta z} = \frac{\delta r \left[\frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha \right]}{\delta r [\cos \alpha + i \sin \alpha]}$$

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta w}{\delta z} = \lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{\delta r \left[\frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha \right]}{\delta r [\cos \alpha + i \sin \alpha]} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha}{\cos \alpha + i \sin \alpha}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \tan \alpha}{1 + i \tan \alpha} \quad (6-7)$$

در صورتی که شرط $\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x}$ برقرار باشد، خواهیم داشت:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} (1 + i \tan \alpha)}{1 + i \tan \alpha} = \frac{\partial w}{\partial x} = -i \frac{\partial w}{\partial y} \quad (7-7)$$

رابطه $\frac{\partial w}{\partial x} = -i \frac{\partial w}{\partial y}$ به این معنی است که در حد اگر از هر جهتی به نقطه نزدیک شویم، یعنی

نسبت به x یا y حد بگیریم مقدار $\frac{dw}{dz}$ یکسان است:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv \quad \text{و} \quad \frac{dw}{dz} = \frac{1}{i} \frac{dw}{dy} = \frac{1}{i} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = -iv + u \quad (8-7)$$

به سرعت مختلط معروف است. با داشتن $w = F(z)$ می توان ϕ و ψ را تعیین کرد و با

تعیین $\frac{dw}{dz}$ مقدار u و v را تعیین کرد. همچنین می توان مقدار و زاویه بردار سرعت را تعیین کرد:

$$\left| \vec{V} \right| = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (9-7)$$

$$\theta = -\tan^{-1} \frac{v}{u} \quad (10-7)$$

پس با داشتن تابع $w = F(z)$ در هر جریان دو بعدی روی صفحه می توان الگوی جریان و تمام اطلاعات در میدان جریان را به دست آورد.

۷-۳- سرعت مختلط

قبلا دیدیم که $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x}$ پس $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial}{\partial x}(\phi + i\psi) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv$ می باشد. بنابراین:

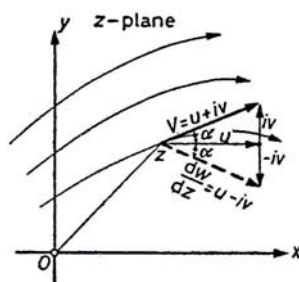
$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{u^2 + v^2} = |V| \quad (۷-۱۱)$$

و نیز داریم:

$$\frac{dw}{dz} = |V|(\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)) = |V|e^{-i\alpha} \quad (۷-۱۲)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{v}{u} \quad (۷-۱۳)$$

ارتباط بین سرعت واقعی و سرعت مختلط در صفحه Z را شکل (۷-۱) نشان می دهد.



شکل ۷-۱: ارتباط بین سرعت واقعی و سرعت مختلط در صفحه Z

پس اگر تابع $w = f(z)$ معلوم باشد از روابط بالا سرعت در هر نقطه پیدا می شود. در فاصله کوچک المانی δz در صفحه Z ، تبدیل مربوط به δw به صورت:

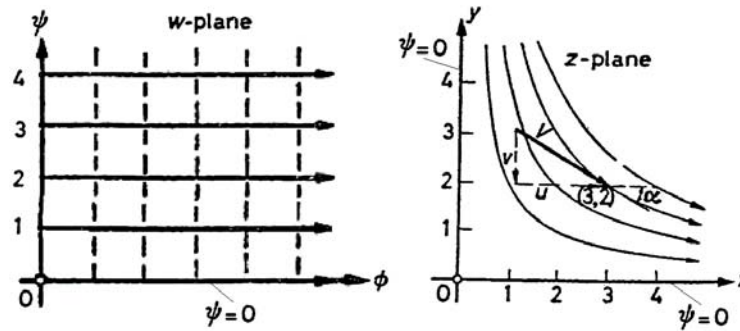
$$\delta w = \frac{dw}{dz} \delta z \quad (۷-۱۴)$$

می باشد. چون $\frac{dw}{dz}$ فقط یک مقدار دارد، ابعاد المان در همه جهات اطراف یک نقطه، به طور مساوی زاویه و طولشان عوض می شود، پس ابعاد المان فقط چرخش پیدا می کنند و طولشان به یک نسبت، کم یا زیاد می شود (بدون تغییر شکل کلی) و زوایا در دو صفحه با هم برابر خواهند بود. المان های کوچک، تغییر شکل نمی دهند ولی المان های بزرگ تغییر شکل کلی می دهند با این حال، زوایا در دو صفحه برابرند.

مثال ۷-۱) برای الگوی $w = f(z) = 2z^2$ ، قدر مطلق و راستای سرعت را در نقطه (3,2) پیدا کنید.

حل:

شکل (۷-۲) الگوی جریان برای تبدیل ذکر شده را نشان می دهد، با مشتقگیری به دست می آید:



شکل ۷-۲: سمت چپ، صفحه w برای مثال (۷-۱) و سمت راست، صفحه z تبدیل یافته آن با تبدیل $w = 2z^2$

$$\frac{dw}{dz} = 4z = u - iv$$

$$u - iv = 4(x + iy) = 12 + 8i$$

$$u = 12, v = -8, |V| = \sqrt{u^2 + v^2} = 14.42$$

$$\alpha = -\tan^{-1} \frac{v}{u} = \tan^{-1} \left(-\frac{8}{12} \right) = -34^\circ 54'$$

مثال ۷-۲) برای نگاشت $w = z^2$

الف- در نقطه (2,1) در صفحه z مقادیر w, ϕ, ψ مربوط و مقدار تغییر w یعنی $\delta\psi, \delta\phi$ متناظر با تغییر $\delta z = 0.5 + 0.2i$ را محاسبه کنید.

ب- نقطه (0,0) را برای خواسته های (الف) آزمایش کنید.

ج- شکل منحنی x ثابت و y ثابت، را در صفحه w بررسی نمایید.

حل: در نقطه (2,1) داریم: $z = x + iy = 2 + i$

(الف)

$$\phi + i\psi = w = z^2 = (2 + i)^2 = 3 + 4i$$

$$\phi = 3, \quad \psi = 4$$

$$\frac{dw}{dz} = 2z = 4 + 2i$$

$$\delta w = \frac{dw}{dz} \delta z = (4 + 2i)(0.5 + 0.2i)$$

$$\delta w = 2 - 0.4 + 0.8i + i = 1.6 + 1.8i$$

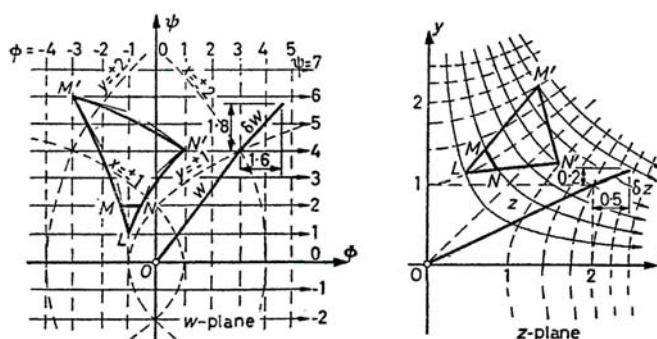
$$\delta w = \delta(\phi + i\psi) = 1.6 + 1.8i \Rightarrow \begin{cases} \delta\phi = 1.6 \\ \delta\psi = 1.8 \end{cases}$$

ب- در نقطه $(0, 0)$

$$z = 0, w = 0, \phi = 0, \psi = 0$$

چون نقطه $(0, 0)$ تحلیلی^۱ نیست، به عبارت دیگر نقطه $(0, 0)$ نقطه منفرد است در آن

$$\frac{dw}{dz} = 2z = 0 \text{ است و } \delta w = \frac{dw}{dz} \delta z = 0 \text{ پس در این نقطه محاسبات قبل صادق نیست.}$$



شکل ۷-۳: سمت چپ، صفحه w برای مثال $(۷-۲)$ و سمت راست، صفحه z تبدیل یافته آن با تبدیل $w = z^2$

ج-

$$w = z^2$$

$$\phi + i\psi = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$\phi = x^2 - y^2, \psi = 2xy$$

۷-۴- تبدیل معکوس^۲

نگاشت ها را می توان برای راحتی به شکل $z = f^{-1}(w)$ به جای $w = f(z)$ بیان کرد. مثلاً به

$$\text{صورت } z = w + e^w.$$

تابع معکوس نقش مهمی در تبدیل بازی می کند و مشتق آن را با ξ نشان می دهند.

$$\xi = \frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}} = \frac{1}{|V|} e^{i\alpha} \quad (۷-۱۵)$$

^۱ Analytic

^۲ Inverse transformation

اگر تابع $w = f(z)$ را داشته باشیم و در صورت معلوم بودن مقدار سرعت V در یک نقطه، ζ را در آن نقطه می توان پیدا کرد. هر تابع $w = F(z)$ و یا $z = F^{-1}(w)$ می تواند در صفحه z الگوی یک جریان دو بعدی غیر چرخشی باشد که به وسیله آن تمام مشخصات آن جریان معلوم می شود.

۷-۵- انتقال چند مرحله (تبدیل چند مرحله)^۱

برای انتقال یا تبدیل از صفحه z به صفحه w در حالت های مشکل، می توان تبدیل یا نگاشت را در چند مرحله انجام داد. در آن صورت رابطه بین z و w با چند معادله تبدیل نسبتاً ساده تر مشخص می شود.

مثال ۷-۳) در تابع $w = \sin e^z$ اگر $e^z = p$ باشد، سرعت مختلط را بدست آورید.

حل- از $e^z = p$ خواهیم داشت:

$$z = \ln p \quad (\text{الف})$$

$$w = \sin P \quad (\text{ب})$$

پس صفحه z بوسیله تبدیل معکوس (الف) به صفحه میانی p نگاشته می شود و الگوی صفحه p نیز توسط نگاشت (ب) تبدیل به صفحه w می گردد. با تعریف:

$$\frac{dw}{dp} = \cos p$$

$$\frac{dp}{dz} = e^z = p$$

خواهیم داشت:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dp} \frac{dp}{dz} = (\cos P)P = P \cos P = e^z \cos(e^z)$$

بنابراین سرعت مختلط بصورت زیر می باشد:

$$\frac{dw}{dz} = u - iv = e^z \cos(e^z)$$

¹ Successive transformations

۷-۶- روابط انتقال ساده

برخی توابع تبدیل کاربردی، بصورت ساده در جدول (۸-۱) فهرست شده اند که در ادامه به بررسی اجمالی هر یک خواهیم پرداخت.

جدول ۷-۱: برخی روابط انتقال ساده

تابع تبدیل	الگوی جریان در صفحه z	
$w = Az$	جریان موازی	۱
$w = m \ln(z - a)$	چشمه در نقطه $z = a$	۲
$w = -\frac{ik}{2\pi} \ln(z - a)$	ورتکس در نقطه $z = a$ در خلاف جهت عقربه های ساعت	۳
$w = \left(m - \frac{ik}{2\pi}\right) \ln(z - a)$	ورتکس مارپیچی ^۱ در $z = a$	۴
$w = \frac{m}{z - a}$	دوبلت در نقطه $z = a$	۵
$w = m \ln \frac{z + a}{z - a}$	چشمه در $(-a, 0)$ و چاه در $(a, 0)$	۶
$z = e^{-w} - w$	تابع معکوس جریان به داخل یک کانال مستطیلی	۷
$z = c \cosh w$	تابع معکوس جریان در شکاف ^۲	۸
$w = Az^n$	جریان در زاویه $\theta = \frac{\pi}{n}$	۹
$w = U \left[z + \frac{a^2}{z} \right]$	جریان حول یک سیلندر	۱۰
$w = U \left[z + \frac{a^2}{z} \right] - \frac{ik}{2\pi} \ln z$	جریان حول سیلندر و با سیرکولاسیون	۱۱

۷-۶-۱- جریان موازی: $w = Az$

الف- اگر A حقیقی باشد.

چون $A = \frac{dw}{dz}$ مقدار ثابت حقیقی است، از رابطه $\delta w = \frac{dw}{dz} \delta z$ داریم:

$$\delta z = \frac{dz}{dw} \delta w = \frac{1}{A} \delta w$$

^۱ Spiral vortex

^۲ Aperture

بنابراین صفحه Z معادل صفحه w است که اندازه مقیاس آن با ضریب ثابت $\frac{1}{A}$ کمتر شده است و چرخش نداشته است.

سرعت مختلط به صورت:

$$\frac{dw}{dz} = u - iv = A \quad (۷-۱۶)$$

می باشد، پس $u = A, v = 0$ یعنی سرعت در صفحه Z ثابت و موازی با محور X ها و به طور مثال اگر $A = U$ باشد، تابع تبدیل $w = Uz$ الگوی یک جریان یکنواخت با سرعت U از چپ به راست است.

ب- اگر A عدد مختلط باشد:

چون:

$$\frac{dw}{dz} = A = a + ib = Re^{i\beta} \quad (۷-۱۷)$$

که:

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right), \quad R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

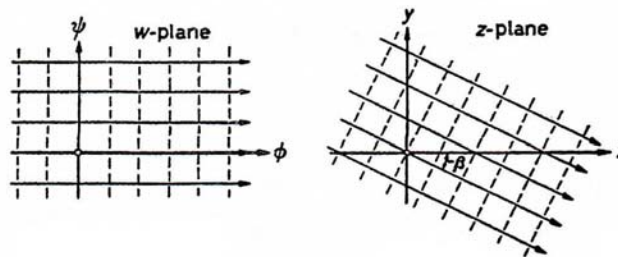
بنابراین

$$\delta z = \frac{1}{A} \delta w = \frac{1}{R} e^{-i\beta} \delta w \quad (۷-۱۸)$$

از بالا نتیجه می شود که اگر هر المان δw با ضریب $\frac{1}{R}$ کم شده و در جهت عقربه های ساعت با زاویه ثابت β چرخیده الگوی صفحه Z به دست می آید. پس الگوی صفحه Z جریان موازی با زاویه β - با جهت مثبت محور X ها است.

$$z = \frac{1}{A} w \Rightarrow re^{i\theta} = \frac{1}{Re^{i\beta}} r_1 e^{i\theta_1} = \frac{r_1}{R} e^{i(\theta_1 - \beta)} \quad (۷-۱۹)$$

$$\theta = \theta_1 - \beta, \quad r = \frac{r_1}{R} \quad (۷-۲۰)$$



شکل ۷-۱: نگاشت $w = Az$ ($A = a + ib, \beta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$)

چون $\frac{dw}{dz} = A$ است، پس:

$$u - iv = a + ib \Rightarrow u = a, \quad v = -b$$

و چون $w = az$ است:

$$\phi + i\psi = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx) \quad (۲۲-۷)$$

$$\phi = ax - by = ux + vy$$

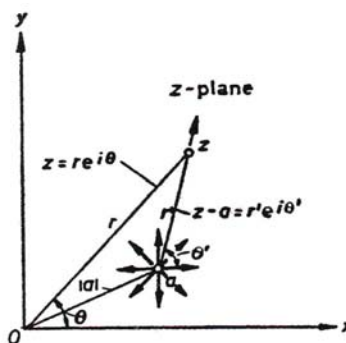
$$\psi = ay + bx = uy - vx \quad (۲۳-۷)$$

۷-۶-۲- چشمه در $z = a$

نگاشت مربوطه به صورت:

$$w = m \ln(z - a) \quad (۲۴-۷)$$

می باشد که $m = Q/2\pi$ و Q قدرت چشمه و a یک ثابت مختلط است. اگر Q منفی باشد، چاه داریم.



شکل ۷-۵: چشمه در $z=a$

$$z - a = r' e^{i\theta'} \Rightarrow \ln(z - a) = \ln(r' e^{i\theta'})$$

$$\phi + i\psi = m \ln(r' e^{i\theta'}) = m \ln r' + im\theta'$$

بنابراین:

$$\phi = m \ln r', \quad \psi = m\theta' \quad (۲۵-۷)$$

نقطه $z = a$ یک نقطه منفرد است و تابع $w = m \ln(z - a)$ در نقطه a تحلیلی نمی باشد، که علت آن این است که سرعت در آن بی نهایت است:

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=a} = \frac{m}{z-a} \Big|_{z=a} = \infty \quad (۲۶-۷)$$

در چشمه سرعت در هر نقطه به صورت شعاعی است. مقدار سرعت برابر است با:

$$\frac{dw}{dz} = |V|e^{i\theta} = \frac{m}{z-a} \quad (۷-۲۷)$$

$$|V| = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{m}{r'} = \frac{Q}{2\pi r'} \quad (۷-۲۸)$$

۷-۶-۳- ورتکس در $z=a$

$$w = -\frac{ik}{2\pi} \ln(z-a) = -\frac{ik}{2\pi} \ln r' e^{i\theta'} \quad (۷-۲۹)$$

قدرت ورتکس k برابر با سیرکولاسیون Γ است.

با قرار دادن $z-a = r' a^{\theta'}$

$$\begin{aligned} \phi + i\psi &= -\frac{ik}{2\pi} \ln(r' e^{i\theta'}) \\ &= -\frac{ik}{2\pi} \ln(r' e^{i\theta'}) \\ \phi &= \frac{k}{2\pi} \theta', \psi = -\frac{k}{2\pi} \ln r' \end{aligned} \quad (۷-۳۰)$$

خطوط جریان دواير متحد المركز به مرکز $z=a$ می باشند.

۷-۶-۴- ورتکس مارپیچی در $z=a$

تابع تبدیل به صورت زیر است:

$$w = \left[m - \frac{ik}{2\pi} \right] \ln(z-a) = m \ln(r' e^{i\theta'}) - \frac{ik}{2\pi} \ln(r' e^{i\theta'}) \quad (۷-۳۱)$$

داریم:

$$\begin{aligned} \phi + i\psi &= m \ln(r' e^{i\theta'}) - \frac{ik}{2\pi} \ln(r' e^{i\theta'}) \\ &= m \ln r' + im\theta' - \frac{ik}{2\pi} \ln r' + \frac{k}{2\pi} \theta' \end{aligned}$$

بنابراین

$$\phi = m \ln r' + \frac{k}{2\pi} \theta' \quad (۷-۳۲)$$

$$\psi = m\theta' - \frac{k}{2\pi} \ln r' \quad (۷-۳۳)$$

۷-۶-۵- دوبلت در مبدا مختصات: $w = \frac{\lambda}{z}$ و در $z = a$

الگوی دوبلت در مبدأ مختصات با تابع تبدیل $w = \frac{\lambda}{z}$ حاصل می شود.

$$\phi + i\psi = \frac{\lambda}{x+iy} = \frac{\lambda(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{\lambda x}{x^2+y^2} - i \frac{\lambda y}{x^2+y^2}$$

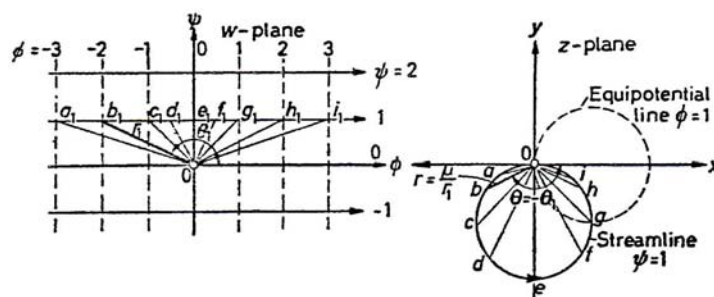
بنابراین

$$\phi = \frac{\lambda x}{x^2+y^2} = \frac{\lambda \cos \theta}{r}, \quad \psi = \frac{\lambda y}{x^2+y^2} = -\frac{\lambda \sin \theta}{r} \quad (۷-۳۴)$$

که نمایش دوبلت با قدرت λ در مبدا مختصات است و چون $z = \frac{\lambda}{w}$ پس:

$$re^{i\theta} = \frac{\lambda}{r_1 e^{i\theta_1}} = \frac{\lambda}{r_1} e^{-i\theta_1}$$

$$r = \frac{\lambda}{r_1}, \quad \theta = -\theta_1 \quad (۷-۳۵)$$

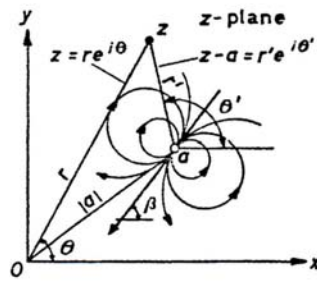


شکل ۷-۶: دوبلت در مبدا مختصات

خطوط جریان موازی در صفحه w به صورت دایری مماس بر محور x ها در مبدا مختصات به صفحه z منتقل می شوند. مطابق شکل (۷-۶) نقطه $b_1(r_1, \theta_1)$ در صفحه w به نقطه $b(r, \theta)$ در صفحه z نگاشته شده است. بطور مشابه نقاط d_1, c_1, a_1 روی خط جریان $\psi = 1$ به نقاط d, c, a روی دایره ای مماس بر محور x ها در صفحه z نگاشته شده اند. خطوط هم پتانسیل در صفحه w به صورت دایری مماس بر محور y ها در مبدا مختصات به صفحه z منتقل می شود.

در حالت کلی برای دوبلت در $z = a$ که محور آن دارای زاویه β با محور x هاست، در الگوی پیشین $(z-a)$ جایگزین z شده و الگو بوسیله ضرب $e^{-i\beta}$ دوران می یابد. شکل (۷-۷) نتیجه را نشان می دهد.

$$w = \frac{\lambda}{(z-a)e^{-i\beta}} = \frac{\lambda}{z-a} e^{i\beta}$$



شکل ۷-۷: دوبلت در $z=a$

۷-۶-۶- ترکیب چشمه و چاه

ترکیب یک چشمه در $(-a,0)$ و یک چاه در $(a,0)$ که قدرت هر دو مساوی باشد به صورت زیر است:

$$w = m \ln(z+a) - m \ln(z-a)$$

تابع فوق را می توان چنین نوشت:

$$w = m \ln \frac{z+a}{z-a} = m \ln \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} \quad (۷-۳۶)$$

داریم:

$$\phi + i\psi = m \ln \frac{r_1}{r_2} - im(\theta_2 - \theta_1)$$

پس:

$$\phi = m \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad \psi = -m(\theta_2 - \theta_1) \quad (۷-۳۷)$$

۷-۶-۷- جریان به داخل یک کانال

با تابع معکوس:

$$(۷-۳۸)$$

$$z = e^{-w} - w$$

و با جایگزینی Z و w داریم:

$$x+iy = e^{-(\phi+i\psi)} - (\phi+i\psi) = e^{-\phi} e^{-i\psi} - (\phi+i\psi)$$

و چون:

$$e^{-i\psi} = \cos \psi - i \sin \psi \quad (۷-۳۹)$$

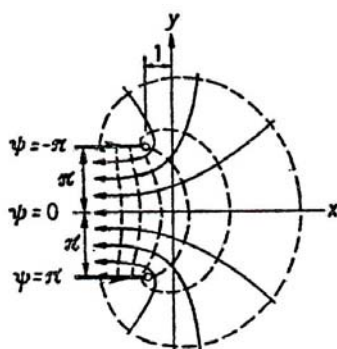
پس:

$$x + iy = e^{-\phi} [\cos \psi - i \sin \psi] - \phi - i \psi$$

بنابراین:

$$x = e^{-\phi} \cos \psi - \phi, \quad y = -e^{-\phi} \sin \psi - \psi \quad (۷-۴۰)$$

می باشد.



شکل ۷-۸: جریان به داخل یک کانال

برای $\psi = 0$ داریم:

$$x = e^{-\phi} - \phi, \quad y = 0$$

پس خط جریان $\psi = 0$ محور x هاست. برای $\psi = -\pi$ داریم:

$$x = -e^{-\phi} - \phi, \quad y = \pi$$

وقتی ϕ از صفر تا $-\infty$ تغییر کند، x از -1 تا $-\infty$ تغییر می کند و y ثابت است. یعنی این خط جریان در $x = -1$ روی خودش تا می شود. در خط جریان $\psi = \pi$ نیز به همین ترتیب $y = -\pi$ است و که در نقطه $x = -1$ خط جریان روی خودش تا می شود.

۷-۶-۸- جریان در شکاف

تابع معکوس این جریان به صورت زیر است:

$$z = c \cosh w \quad (۷-۴۱)$$

در عمل، در جریان سیال حقیقی به علت جدائی، شکل جریان متفاوت خواهد بود، البته در جریان در محیط متخلخل جدایی نداریم.

$$z = c \cosh(\phi + i\psi) = c [\cosh \phi \cos \psi + i \sinh \phi \sin \psi] \quad (۷-۴۲)$$

$$x = c \cosh \phi \cos \psi \quad (۷-۴۳)$$

$$y = c \sinh \phi \sin \psi$$

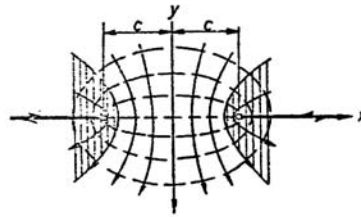
با توجه به روابط بالا داریم:

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \phi} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \phi} = 1 \quad (۴۴-۷)$$

برای خطوط $\phi = cte$ معادله فوق به یک بیضی تبدیل می شود، به طوری که کانون ها در نقاط $(c,0)$ و $(-c,0)$ قرار دارند.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (۴۵-۷)$$

به طریق مشابه می توان نشان داد که خطوط جریان بر خطوط پتانسیل عمود هستند.



شکل ۷-۹: جریان در یک شکاف

برای خطوط $\psi = cte$ معادله به یک هذلولی تبدیل می شود که داریم:

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \psi} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \psi} = 1 \quad (۴۶-۷)$$

کانون ها در $(c,0)$ و $(-c,0)$ قرار دارند. این الگوی جریان پتانسیل در یک شکاف می باشد و در عمل، فقط برای جریان شکاف در یک محیط متخلخل می باشد.

۷-۶-۹- جریان در یک زاویه $(\frac{\pi}{n})$

این الگو با تبدیل زیر حاصل می شود:

$$(۴۷-۷)$$

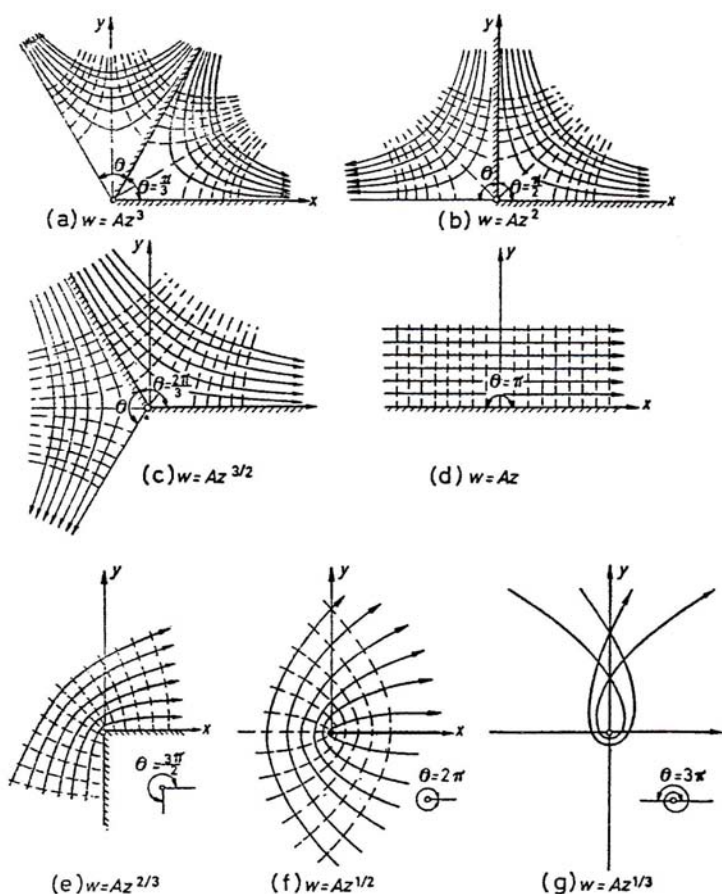
$$w = Az^n$$

الگوی جریان در صفحه Z به وسیله مختصات قطبی با نگاشت معکوس پیدا می شود.

$$\left. \begin{aligned} z &= \left(\frac{w}{A} \right)^{1/n} & z &= re^{i\theta}, w = r_1 e^{i\theta_1} \\ re^{i\theta} &= \left(\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{A} \right)^{1/n} = \left(\frac{r_1}{A} \right)^{1/n} e^{i\theta/n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad r = \left(\frac{r_1}{A} \right)^{1/n}, \quad \theta = \frac{\theta_1}{n} \quad (۴۸-۷)$$

پس زاویه در صفحه Z برابر $\frac{1}{n}$ زاویه در صفحه w می باشد و فاصله از مرکز در صفحه Z برابر توان $\frac{1}{n}$ فاصله بخش بر A در صفحه w می باشد.

به عنوان مثال زاویه $\frac{\pi}{2}$ در صفحه w مربوط به زاویه 2π در صفحه Z می شود. به عبارت دیگر $n=2$ بوده و الگوی این جریان با تبدیل $w = Az^2$ حاصل می شود. شکل (۷-۱۰) چند نمونه از این الگوها را نشان می دهد.



شکل ۷-۱۰: جریان در گوشه با زاویه های گوناگون

۷-۶-۱۰- جریان حول استوانه بدون سیرکولاسیون

می دانیم که ترکیب جریان یکنواخت و دوپلت جریان حول استوانه را ایجاد می کند، لذا تابع تبدیل مجموع جریان یکنواخت و دوپلت را بررسی می کنیم:

$$w = Uz + \frac{\lambda}{z} = U \left(z + \frac{\lambda}{Uz} \right) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (۷-۴۹)$$

که $a = \sqrt{\frac{\lambda}{U}}$ شعاع استوانه می باشد. این تابع تبدیل در z های بزرگ، به جریان موازی، $w = Uz$ تبدیل می شود.

وقتی z را در سیستم قطبی ($z = re^{i\theta}$) بنویسیم:

$$\begin{aligned}\phi + i\psi &= U \left(re^{i\theta} + \frac{a^2}{r} e^{-i\theta} \right) = U \left(r \cos \theta + \frac{a^2}{r} \cos \theta + ir \sin \theta - i \frac{a^2}{r} \sin \theta \right) \\ &= U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta - iU \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\phi = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta, \quad \psi = U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta \quad (50-7)$$

که جریان حول استوانه است. سرعت مختلط $\frac{dw}{dz}$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{dw}{dz} = U \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) = |V| e^{-i\theta} \quad (51-7)$$

در نقاط $z = \pm a$ سرعت صفر است که این نقاط منفرد می باشد و در $z = \pm ia$ مقدار سرعت $2U$ خواهد بود که همان نتیجه مورد انتظار است. پس ترکیب دو جریان ذکر شده در صفحه w به جریان حول استوانه در صفحه Z تبدیل می شود.

۷-۶-۱۱- جریان حول استوانه با سیرکولاسیون

با جمع کردن ورتکس در خلاف جهت عقربه های ساعت با قدرت k با توابع تبدیل جریان اطراف استوانه بدون سیرکولاسیون این جریان به دست می آید.

$$w = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - \frac{ik}{2\pi} \ln z \quad (52-7)$$

که رابطه فوق تابع تبدیل جریان حول استوانه با سیرکولاسیون می باشد. به روش مشابه قبل می توان نشان داد:

$$\phi = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{k}{2\pi} \theta \quad (53-7)$$

$$\psi = U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta - \frac{k}{2\pi} \ln r \quad (54-7)$$

۷-۷- روش تصویر آئینه ای

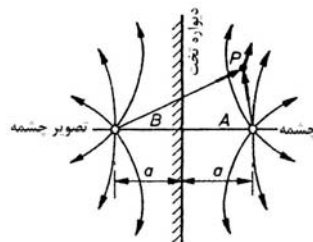
تبدیل های قبلی برای جریان غیر محدود مثل جریان بی نهایت اطراف یک سیلندر بود. در صورتی که در مسائل عملی، تعداد بی شماری جریان وجود دارد که مجاور یک یا چند جسم جامد است و جریان به نحوی محدود شده است. موارد زیر مثالهایی از این حالت هستند:

(۱) جریان آب زیرزمینی نزدیک کف یک سد

(۲) یک ایروفویل نزدیک زمین مثل حالت شروع پرواز یا فرود هواپیما

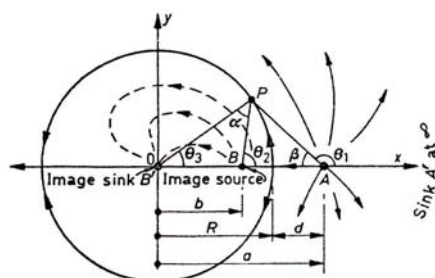
(۳) جریان اطراف سیلندری که در تونل باد با دیواره های نسبتاً تنگ محدود شده است.

در این حالات حل های پایه ای جریان پتانسیل را می توان برای اثرات دیواره به وسیله روش تصویر تعمیم داد. مطابق شکل (۷-۱۱) یک چشمه دو بعدی را در نظر بگیرید که در فاصله a از دیواری قرار دارد برای ایجاد کردن دیوار مورد نظر یک چشمه فرضی (تصویر آئینه ای) با قدرت معادل و در فاصله یکسان در طرف دیگر دیوار قرار می دهیم. با تقارن یا اصل گرافیک می توان دید که دو چشمه خط جریان مشترک بین سطح تختی را بین خود ایجاد می کنند که آن را می توان دیوار در نظر گرفت. اگر چشمه روی دیوار باشد می توان دیوار را نیمدایره ای به شعاع بینهایت فرض کرد.



شکل ۷-۱۱: یک چشمه نزدیک دیوار و تصویر آئینه ای آن

در واقع برای هر چشمه در شکل (۷-۱۱) می توان یک چاه در روی نیمدایره ای به شعاع بینهایت متصور شد. با این توضیح اگر مرز جامد، دیواره غیر تختی مانند یک استوانه به شعاع R باشد، چشمه و همچنین چاه متناظر با آن که در بینهایت قرار دارد باید نسبت به دیواره استوانه، تصویر شوند. این موضوع در شکل (۷-۱۲) نشان داده شده است.



شکل ۷-۱۲: چشمه در نزدیکی استوانه جامد و تصویرهای آینه ای

همانطور که شکل نشان می دهد، چاه A' که در بینهایت قرار دارد در نقطه B' مرکز استوانه، تصویر شده است و چشمه A در نقطه B داخل استوانه بگونه ای تصویر می گردد که رابطه $ab = R^2$ برقرار باشد. در شکل (۷-۱۲) دو مثلث OPB و OAP متشابه هستند، به این دلیل که دارای زاویه مشترک O بوده و رابطه $\frac{OB}{OP} = \frac{OP}{OA}$ به علت تساوی $OB \cdot OA = OP^2$ یا $ab = R^2$ برقرار است. در نتیجه زوایای α و β برابر می باشد.

در مورد چشمه و چاه مشاهده نمودیم که تابع جریان و تابع پتانسیل به ترتیب به صورت $\psi = \pm m\theta$ و $\phi = \pm m \ln r$ است. در شکل (۷-۱۲) با صرف نظر کردن از اثرات چاه واقع در بینهایت برای هر نقطه روی استوانه مانند P از نقطه نظر تابع جریان خواهیم داشت:

$$\psi_P = m(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3) = m(\theta_1 + \alpha) = m(\theta_1 + \beta) = m\pi = \text{const.} \quad (7-55)$$

توجه داریم که: $\theta_2 - \theta_3 = \pi - (\angle OBP) - \theta_3 = \alpha$

مثال ۷-۴) در حالت چشمه نزدیک یک دیواره افقی، سرعت روی دیواره در امتداد زیر چشمه صفر است و سپس افزایش یافته به ماکزیمم می رسد و بعد کاهش یافته و در فاصله دور، دوباره به صفر می رسد. اگر قدرت چشمه دو بعدی $8 \frac{m^2}{s}$ باشد فاصله مناسبی را پیدا کنید که چشمه باید از دیواره قرار گیرد تا سرعت حداکثر در امتداد دیواره $5 \frac{m}{s}$ شود.

حل -

در هر نقطه برای چشمه $V_r = m/r$ سرعت در روی دیواره u_{wall} با وجود چشمه و تصویر آن برابر است با:

$$u_{\text{wall}} = 2V_r \cos \theta = \frac{2m}{r} \cos \theta$$

از شکل (۷-۱۳) می توان دید که:

$$r = (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

در نتیجه:

$$u_{\text{wall}} = \frac{2mx}{x^2 + a^2}$$

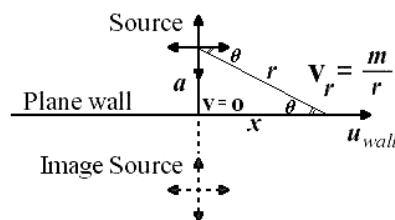
پس :

$$\frac{du_{\text{wall}}}{dx} = \frac{2m(x^2 + a^2) - 4mx^2}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{2m(a^2 - x^2)}{(x^2 + a^2)^2}$$

در نقطه ای از دیوار که ماکزیمم سرعت دارد:

$$\frac{du_{wall}}{dx} = 0 \Rightarrow x = a \Rightarrow (V_r)_{\max} = \frac{m}{a}$$

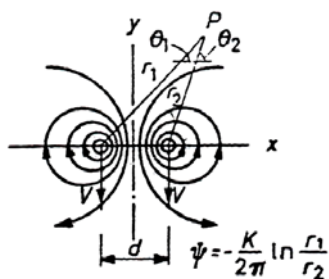
$$a = \frac{m}{(V_r)_{\max}} = \frac{8}{5} = 1.625m \quad \text{در نتیجه:}$$



شکل ۷-۱۳: چشمه مربوط به مثال (۸-۴)

برای $x > a$ در امتداد دیوار سرعت کم و فشار زیاد می شود و احتمال جدایی در جریان وجود دارد می توان از تئوری لایه مرزی، نقطه جدائی را پیش بینی کرد.

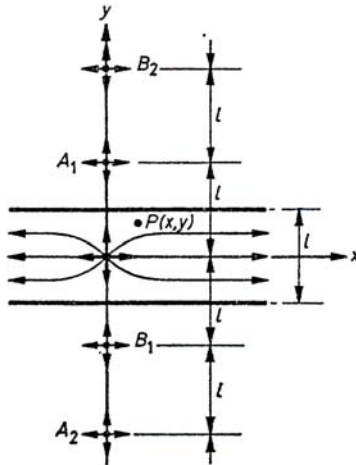
شکل (۷-۱۴) یک ورتکس را در نزدیکی دیواره تخت نشان می دهد که معادل با ورتکس و تصویر آینه ای آن با گردش در جهت مخالف می باشد. به عبارت دیگر جریان نزدیک یک جفت ورتکس با قدرت برابر و جهت مخالف در جریان غیر محدود، معادل با یک ورتکس در جریان محدود شده با یک دیواره تخت است.



شکل ۷-۱۴: ورتکس در نزدیکی دیواره تخت و تصویر آینه ای آن

در حالاتی که بیش از یک مرز جامد وجود داشته باشد، تصویر روی هر مرز دارای تصویر دیگری روی مرز دیگر نیز می باشد و به همین ترتیب... در حقیقت مجموعه ای از بینهایت تصویر بوجود

خواهد آمد. شکل (۷-۱۵) بخشی از این مجموعه نامتناهی تصاویر را برای چشمه ای که در میان دو صفحه تخت موازی که به فاصله l از هم قرار گرفته اند نشان می دهد.



شکل ۷-۱۵: چشمه در نقطه میانی بین دو دیواره تخت موازی

در این حالت تابع جریان معادل، بصورت یک سری نامتناهی که شامل جملات مربوط به خود چشمه و تصاویر آنهاست خواهد بود.

$$\psi_p = \sum m\theta = m(\tan^{-1} \frac{y}{x} + \tan^{-1} \frac{y-l}{x} + \tan^{-1} \frac{y-2l}{x} + \dots + \tan^{-1} \frac{y+l}{x} + \tan^{-1} \frac{y+2l}{x} + \dots)$$

(۷-۵۶)

تمرین های فصل هفتم

۱-۷- برای $w = \phi + i\psi$ که همان تابع مختلط $w = F(z)$ می باشد چه شرطی باید برقرار

باشد تا این تابع تحلیلی باشد؟ در صورت تحلیلی بودن آیا ϕ و ψ می توانند تابع

جریان و تابع پتانسیل جریان غیر چرخشی دو بعدی روی صفحه تخت باشند یا خیر؟

چرا؟

۲-۷- تابع تبدیل $w = F(z)$ ، تابع جریان و تابع پتانسیل سرعت را برای جریان های موازی با

محور x و موازی با محور y بیابید. فرض کنید جهت جریان ها جهت مثبت محورهای

x و y باشند.

۳-۷- تابع جریان برای یک جریان دو بعدی برابر با $\psi = 9 + 6x - 4y + 4xy$ می باشد تابع

پتانسیل و سرعت مختلط $\frac{dw}{dz}$ و مولفه های سرعت در این جریان را بیابید.

۴-۷- برای جریان ورتکس آزاد (ورتکس غیر چرخشی) که در مبدأ مختصات قرار دارد،

مولفه های سرعت را بر حسب سیرکولاسیون Γ بنویسید، تابع جریان و تابع پتانسیل آنرا

به دست آورید. تابع تبدیل مختلط $w = F(z)$ را برای آن بنویسید. سه خط جریان و

سه خط پتانسیل آنرا با دقت خوب رسم کنید. توزیع سرعت در طول r را برای یک

ورتکس طبیعی مثلاً گرداب رسم کنید و جریان گرداب طبیعی را با ورتکس آزاد مقایسه

کرده تفاوت و تشابه آنها را توضیح دهید. در کدام قسمت از جریان گرداب طبیعی، این

جریان چرخشی است و در چه قسمتی از آن می توان ورتیسیته را صفر فرض کرد؟

۵-۷- در جریان غیر لزج تراکم ناپذیر دوبعدی در یک زاویه 90° درجه (دو دیوار عمود بر هم)

تابع جریان در مختصات قطبی به صورت $\psi = 2r^2 \sin 2\theta$ می باشد.

الف- تابع پتانسیل جریان ϕ و تابع تبدیل مختلط $w = F(z)$ این جریان را بیابید.

ب- چند خط جریان و چند خط پتانسیل را با تقریب خوب رسم کنید.

ج- سرعت مختلط را در این جریان مشخص کنید.

د- در صورتی که دانسیته سیال $1000 \frac{kg}{m^3}$ باشد و فشار در نقطه $r = 1m$ و $\theta = 0$ برابر با

$30kPa$ باشد، فشار را در نقطه $r = 0.5m$ و $\theta = \frac{\pi}{2}$ به دست آورید.

۷-۶- تابع تبدیل برای جریان اطراف استوانه $w = U_{\infty}(z + \frac{a^2}{z})$ می باشد. تابع جریان و تابع

پتانسیل این جریان را به دست آورید و خط جریان $\psi = 0$ و دو خط جریان دیگر را با

دقت خوب رسم کنید. نشان دهید ترکیب جریان فوق با یک ورتکس (با تابع

جریان $-\frac{k}{2\pi} \ln r$) معادل جریان اطراف استوانه با سیرکولاسیون است. در این حالت

تابع جریان و تابع تبدیل $w = F(z)$ را معین کنید و شکل جریان را در صفحه w و

صفحه z رسم کنید. سرعت مختلط $\frac{dw}{dz}$ و مولفه های سرعت و نقاط سکون را در این

جریان مشخص کنید. ضریب بدون بعد $c_p = \frac{P - P_{\infty}}{1/2 \rho U_{\infty}^2}$ را روی جسم به طور تقریبی

رسم کنید.

۷-۷- در صورتی که استوانه ای با شعاع a در سیال حقیقی حول محور خود دوران داشته

باشد و جریان سیال با سرعت U عمود بر محور آن عبور کند، شکل خطوط جریان و

توزیع فشار بی بعد چه تفاوتی با حالت جریان پتانسیل اطراف استوانه با سیرکولاسیون

دارد؟ تفاوتها را با رسم شکل مشخص کنید و توضیح دهید. در مورد نیروهای پسا و برآ

در هر حالت چه می توان گفت؟

۷-۸- ترکیب یک جریان چشمه روی محور x ها در نقطه $-a$ با تابع جریان $\psi_1 = m\theta_1$ و

یک چاه روی محور x ها در نقطه a با تابع جریان $\psi_2 = -m\theta_2$ و جریان موازی با

سرعت U_∞ ، معادل جریان ایده آل غیر چرخشی اطراف یک بدنه دو بعدی بیضی شکل

(استوانه با مقطع بیضی) می باشد.

الف- تابع جریان و تابع پتانسیل این جریان را به دست آورید و تابع مختلط $w = F(z)$ را برای

این جریان بنویسید.

ب- سرعت مختلط $\frac{dw}{dz}$ و مولفه های سرعت v_r و v_θ یا u و v را بر حسب r و θ یا x و y

به دست آورده و محل نقاط سکون را مشخص کنید.

ج- معادله بیضی را به دست آورید و شکل جریان را در صفحه w و صفحه z رسم کرده و دو

خط جریان را نسبتاً دقیق در اطراف بیضی رسم کنید.

د- رابطه ای بر حسب متغیرها برای فشار بدون بعد روی بیضی $(\frac{P - P_\infty}{1/2\rho U_\infty^2})$ به دست آورده و

توزیع فشار بی بعد را اطراف بیضی نشان دهید.

۷-۹- یک چشمه با شدت $30 \frac{m^2}{s}$ در مبدا مختصات قرار دارد. چشمه دیگری با شدت

$20 \frac{m^2}{s}$ در نقطه $(-1,0)$ قرار دارد. مولفه سرعت را در جهت های x و y در نقطه

$(-1,0)$ بیابید. همچنین مولفه های سرعت را در نقطه $(1,1)$ نیز بیابید.

۷-۱۰- با استفاده از روش تصویر آینه ای خطوط جریان را بین دو جسم دو بعدی زیر و خارج

آنها رسم کنید. آیا این جریان می تواند مشابه جریان حرکت یک ایرفویل نزدیک سطح

جامد افقی باشد؟ چرا؟



شکل ۷-۱۶: مربوط به تمرین ۷-۱۰

۷-۱۱- یک ورتکس آزاد مطابق شکل در یک سیال غیر لزج، نزدیک دیواره صلب افقی قرار

گرفته است. توزیع سرعت به صورت $v(r) = \frac{K}{r}$ بوده که r فاصله تا مرکز ورتکس

است و $v(0) = 0$. جهت ورتکس پادساعتگرد می باشد. اگر ورتکس در لحظه $t = 0$ در

حال سکون باشد، با گذشت زمان چه اتفاقی رخ می دهد؟ چرا؟

الف- تغییری رخ نمی دهد.

ب- قدرت ورتکس کم می شود.

ج- ورتکس به سمت راست حرکت می کند.

د- ورتکس به سمت چپ حرکت می کند.

ه- ورتکس از دیوار دور می شود.

و- ورتکس به دیوار نزدیک می شود.



شکل ۷-۱۷: ورتکس نزدیک دیواره صلب مربوط به تمرین ۷-۱۱

فصل هشتم

انتقال دایره^۱

۸-۱- ایده کلی

الگوی جریان حول یک سیلندر که از تبدیل مختلط $w = U \left(z_1 + \frac{a^2}{z_1} \right)$ به دست می آید را می توان به الگوهای جریان در صفحه جدید تبدیل کرد. بنابراین جریان حول سیلندر را می توان الگویی در صفحه میانی Z_1 در نظر گرفت که بعد از چند تبدیل، در نهایت به صفحه فیزیکی Z منتقل می شود. در همه این حالات در صفحه Z_1 دایره ای به شعاع a به پروفیل جدیدی در صفحه Z تبدیل می شود. برای آسانی سرعت U را همیشه برابر واحد می گیریم که در جهت مثبت محور x هاست. در آن صورت از صفحه w به صفحه Z_1 داریم:

$$w = z_1 + \frac{a^2}{z_1} \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2} \left[w \pm \sqrt{w^2 - 4a^2} \right] \quad (۸-۱)$$

جریان های فیزیکی که درباره آنها صحبت خواهیم کرد، شکل الگوی جریان حول صفحه تخت، جریان حول بیضی، جسم خط جریانی، جریان حول کمان و ایرفویل نامتقارن می باشد.

¹ Transformation of the Circle

۸-۲- تعریف تصویر آینه ای یک نقطه

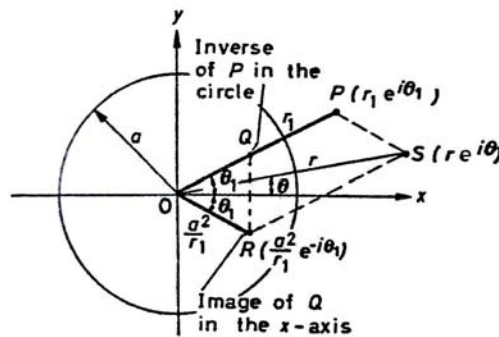
تصویر^۱ هر نقطه مثل Q نسبت به محور x نقطه R است، به طوری که $OR = OQ$ و زاویه دو بردار OQ و OR قرینه یکدیگرند، یعنی اگر $\vec{OQ} = (a^2/r_1)e^{i\theta_1}$ باشد، آنگاه $\vec{OR} = (a^2/r_1)e^{-i\theta_1}$ خواهد بود. حال اگر طول $OP = r_1$ باشد خواهیم داشت $OP = r_1e^{i\theta_1}$ و مجموع دو بردار $\vec{OP}$ و $\vec{OR}$ برداری مثل $\vec{OS} = re^{i\theta}$ را می دهد که :

$$\vec{OS} = \vec{OP} + \vec{OR} \quad (۲-۸)$$

و خواهیم داشت:

$$\vec{OS} = re^{i\theta} = r_1e^{i\theta_1} + \frac{a^2}{r_1}e^{-i\theta_1} \quad (۳-۸)$$

نقطه S را می توان از روش برداری متوازی الاضلاع به دست آورد و خواهیم دید که با قرار دادن $z = re^{i\theta}$ ، $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ می توان به طور هندسی الگوی تبدیل جریان حول استوانه را رسم کرد.



شکل ۸-۱: نمایش گرافیکی تصویر نقطه و معکوس نقطه

۸-۳- تعریف نقطه معکوس و انتقال دایره

طبق تعریف، نقطه معکوس^۲ هر نقطه ای مثل P نسبت به دایره ای به مرکز O و شعاع a ، نقطه ای مانند Q است که روی خط OP واقع شده و رابطه $OP \cdot OQ = a^2$ برقرار باشد. اگر بردار OP را

$$|OQ| = \left| \frac{a^2}{OP} \right| = \left| a^2 / r_1 \right| \quad \text{می باشد بطوریکه}$$

خواهد بود و با توجه به اینکه:

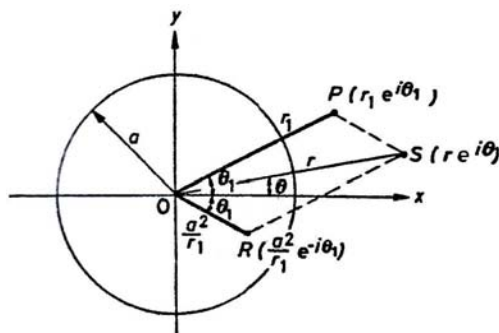
$$\vec{OP} = r_1e^{i\theta_1} \quad (۴-۸)$$

از شکل های (۱-۸) و (۲-۸) می توان دید که:

¹ Image

² Inverse point

$$OQ = \frac{a^2}{r_1} e^{i\theta_1} \quad (۵-۸)$$



شکل ۸-۲: انتقال دایره برای نقطه P

$$\vec{OS} = re^{i\theta} = \vec{OP} + \vec{OR} = r_1 e^{i\theta_1} + \frac{a^2}{r_1} e^{-i\theta_1} \quad (۶-۸)$$

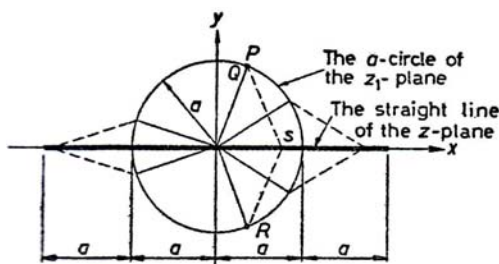
از $OP = z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ داریم:

$$\vec{OS} = re^{i\theta} = z_1 + \frac{a^2}{z_1} \quad (۷-۸)$$

پس S انتقال یافته نقطه P با تابع تبدیل $z = z_1 + a^2 / z_1$ می باشد.

۸-۴- رسم تابع تبدیل $z = z_1 + a^2 / z_1$ به صورت گرافیکی

طبق مباحث پیشین اگر نقطه P روی دایره به شعاع a باشد، نقطه معکوس آن یعنی نقطه Q روی خودش قرار دارد. نقطه R تصویر معکوس نقطه P نسبت به دایره a است و S انتقال یافته نقطه P با تابع تبدیل $z = z_1 + a^2 / z_1$ است که از مجموع یک بردار و تصویر آن بردار نسبت به محور x به دست می آید. پس طبق شکل (۸-۳) نقاط واقع در روی دایره به شعاع a به خطی روی محور x به طول 4a از -2a تا 2a تبدیل می شوند.



شکل ۸-۳: رسم گرافیکی انتقال دایره $z = z_1 + a^2 / z_1$

۵-۸- جریان موازی با یک صفحه تخت نازک

تبدیل یا انتقال $z_1 = \frac{1}{2} \left[w \pm \sqrt{w^2 - 4a^2} \right]$ را به جریان موازی در صفحه w حول دایره ای به

شعاع a در صفحه Z_1 منتقل می کند. برای یافتن نقاط منفرد، چون $w = z_1 + \frac{a^2}{z_1}$ است. بنابراین:

$$\frac{dw}{dz} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{a^2}{z_1^2} = 0 \Rightarrow z_1 = \pm a$$

پس نقاط $z_1 = \pm a$ نقاط منفرد هستند و همین طور در $z_1 = 0$ مقدار $dw/dz = -\infty$ می شود که

یک نقطه منفرد است. رابطه انتقال یا تبدیل بعدی $z = z_1 + \frac{a^2}{z_1}$ می باشد که دایره به شعاع a را

مطابق شکل (۸-۵) تبدیل به خطی می کند که از $(-2a, 0)$ تا $(2a, 0)$ رسم شده است که می توان آن

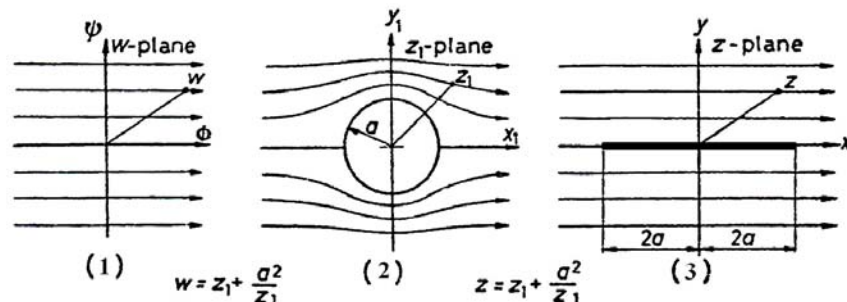
را صفحه صافی بدون ضخامت و به طول $4a$ در نظر گرفت. بقیه جریان به جریان موازی با محور

x ها در جهت مثبت محور x تبدیل می شود. در صفحه Z_1 نقاط منفرد $z_1 = \pm a$ می باشد ولی در

صفحه Z نقاط منفرد در $z = \pm 2a$ و $z = 0$ می باشد.

باید توجه داشت که الگوی تمام این تبدیل های دایره را می توان به طریقه گرافیکی پیدا کرد، مثلاً

برای این حالت از طریق گرافیکی دیدیم که دایره تبدیل به خط مستقیم می شود.



شکل ۸-۵: مراحل ایجاد جریان موازی با یک صفحه تخت نازک

۶-۸- جریان عمود بر صفحه تخت

اگر به وسیله تبدیل $z_2 = -iz_1$ جهت جریان حول دایره را 90° درجه تغییر دهیم و سپس آن را به

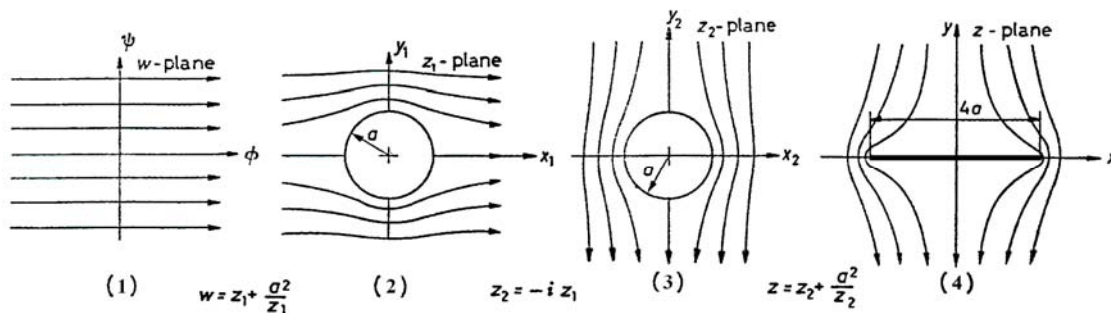
صفحه فیزیکی $z = z_2 + (a^2/z_2)$ نگاشت دهیم، در آن صورت جریان عمود بر صفحه تخت

خواهیم داشت. طبق شکل (۸-۵) انتقال $z_2 = -iz_1$ جهت جریان در صفحه Z_2 را به اندازه $-\pi/2$

نسبت به جهت جریان در صفحه Z_1 دوران می دهد و بالاخره تبدیل $z = z_2 + (a^2/z_2)$ جریان در

امتداد منفی محور y ها را تبدیل به جریان عمود بر یک صفحه تخت به طول $4a$ می کند.

شکل (۵-۸) مراحل تبدیلات ذکر شده را نشان می دهد، نقطه $z = 0$ نقطه سکون و نقاط $z = -2a$ و $z = 2a$ دو انتهای صفحه تخت، نقاط منفرد می باشند.



شکل ۵-۸: مراحل ایجاد جریان عمود بر صفحه تخت

داریم:

$$z_2 = -iz_1 \quad (۸-۸)$$

پس:

$$z_1 = \frac{z_2}{-i} = iz_2 \quad (۹-۸)$$

با توجه به اینکه $w = z_1 + \frac{a^2}{z_1}$ است، بنابراین:

$$w = iz_2 + \frac{a^2}{iz_2} = i \left(z_2 - \frac{a^2}{z_2} \right) \quad (۱۰-۸)$$

پس:

$$w^2 = - \left(z_2 - \frac{a^2}{z_2} \right)^2 \quad (۱۱-۸)$$

و چون $z = z_2 + \frac{a^2}{z_2}$ است:

$$w^2 + z^2 = 4a^2 \quad (۱۲-۸)$$

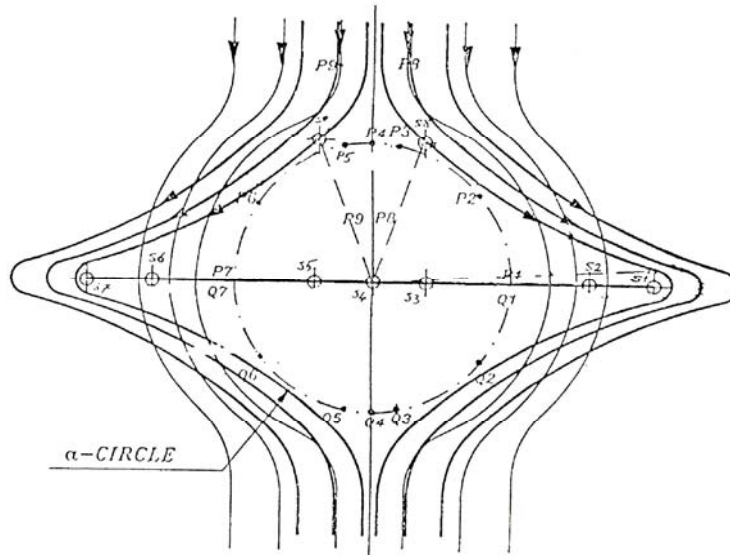
بنابراین:

$$w = i \sqrt{z^2 - 4a^2} \quad (۱۳-۸)$$

و داریم

$$\frac{dw}{dz} = \frac{-z}{i \sqrt{z^2 - 4a^2}} \quad (۱۴-۸)$$

به ازاء مقدار $z_1 = \pm 2a$ ، $dw/dz = \infty$ و به ازاء $z_1 = 0$ ، $dw/dz = 0$ است، یعنی این سه نقطه منفرد هستند.



شکل ۸-۶: خطوط جریان عمود بر یک صفحه تخت

یکی از کاربردهای این مسئله، جریان داخل کانال به طرف یک صفحه یا دیواره قائم می باشد که می توان آن را با دوران صفحه Z در تبدیل پایانی به مقدار $\frac{\pi}{2}$ به دست آورد. با ضرب کردن Z تبدیل نهایی در i جریان در صفحه فیزیکی $z' = iz$ به دست می آید.

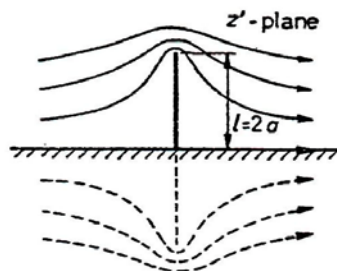
$$z = \frac{z'}{i} \quad (8-15)$$

با جایگذاری $l = 2a$ در رابطه (۸-۱۳) داریم:

$$w = i\sqrt{z^2 - l^2} = i\sqrt{\left(\frac{z'}{i}\right)^2 - l^2} = i\sqrt{\frac{z'^2 - (i)^2 l^2}{(i)^2}}$$

در نتیجه:

$$w = \sqrt{z'^2 + l^2} \quad (8-16)$$



شکل ۸-۷: جریان کانال به طرف یک صفحه یا دیواره قائم

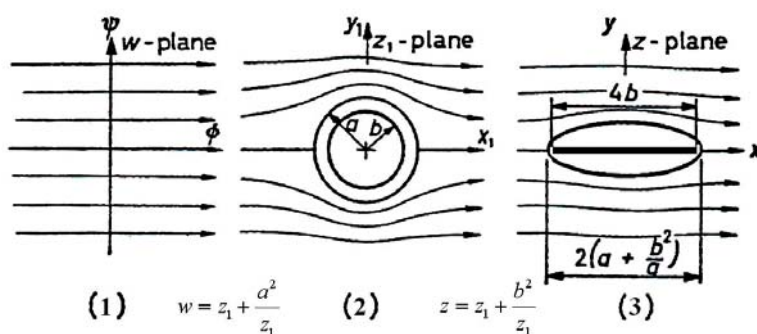
۷-۸- جریان حول یک بیضی

در حالت اول انتقال دایره اگر آخرین تبدیل را $z = z_1 + b^2/z_1$ قرار دهیم به طوری که $b < a$ باشد در آن صورت دایره به شعاع b در صفحه Z_1 به خط مستقیم از $(-2b, 0)$ تا $(2b, 0)$ تبدیل شده و دایره a تبدیل به بیضی در صفحه Z می شود.

$$w = z_1 + \frac{a^2}{z_1} \quad (۷-۸)$$

$$z = z_1 + \frac{b^2}{z_1} \quad (۸-۸)$$

شکل (۸-۸) مراحل نگاشت این جریان را نشان می دهد.



شکل ۸-۸: مراحل ایجاد جریان حول یک بیضی

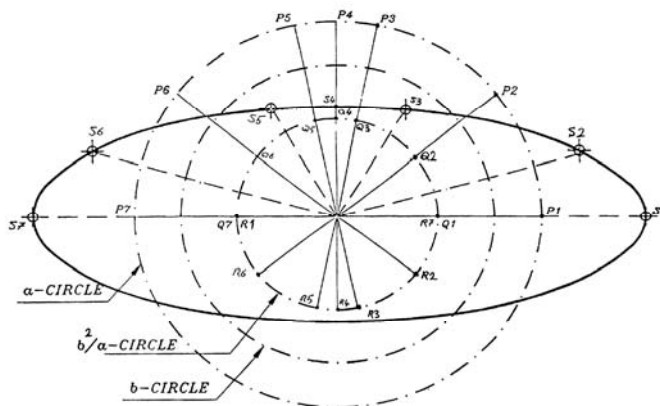
داریم:

$$\frac{dw}{dz_1} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{a^2}{z_1^2} = 0 \Rightarrow z_1 = \pm a \quad (۹-۸)$$

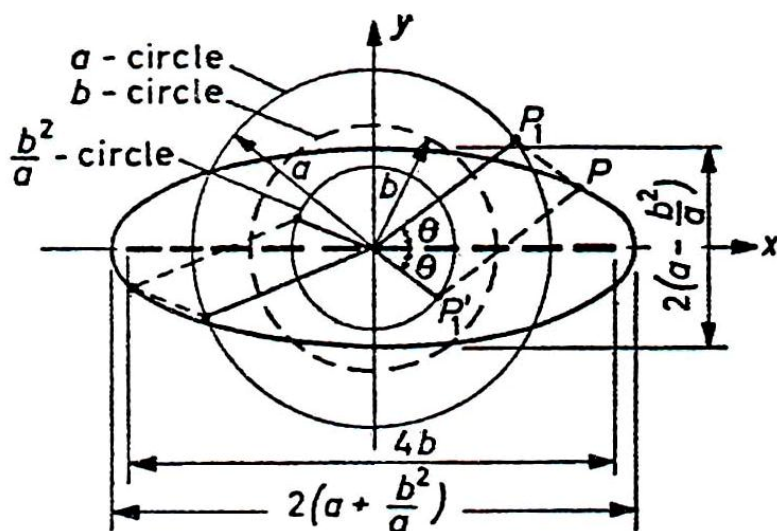
$$\frac{dz}{dz_1} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{z_1^2} = 0 \Rightarrow z_1 = \pm b \quad (۱۰-۸)$$

پس نقاط $z_1 = \pm a$ و $z_1 = \pm b$ نقاط منفرد در صفحه Z_1 می باشند. با جایگذاری $z_1 = \pm b$ در رابطه (۸-۱۸) نقاط منفرد در صفحه Z در دو انتهای خط به طول $4b$ به دست می آیند که مانند دو کانون بیضی هستند. از طرفی با جایگذاری $z_1 = \pm a$ در رابطه (۸-۱۸) نقاط منفرد در صفحه Z ، به صورت $z = \pm(a + \frac{b^2}{a})$ به دست می آیند.

هر نقطه P_1 روی دایره a دارای معکوسی نسبت به دایره b است که این نقطه روی دایره ای با شعاع $\frac{b^2}{a}$ قرار می گیرد، زیرا $\frac{b^2}{a} \cdot a = b^2$ است. p'_1 تصویر معکوس نقطه P_1 نسبت به دایره b است و P انتقال یافته نقطه P_1 با تابع تبدیل $z = z_1 + b^2/z_1$ است که از مجموع بردار P_1 و تصویر معکوس آن نسبت به محور x به دست می آید. این موضوع در شکل زیر نشان داده شده است.

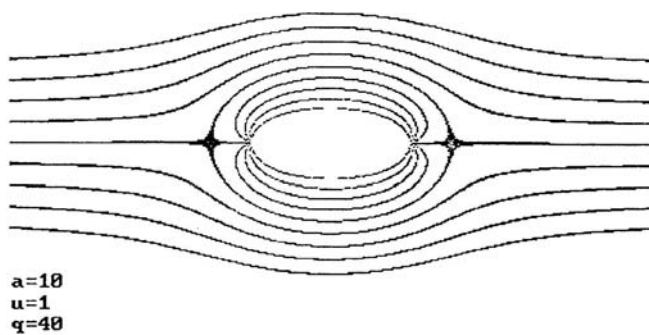


(الف)



(ب)

شکل ۸-۹: الف) ایجاد گرافیکی جسم بیضی شکل
ب) مشخصات بیضی نگاشته شده



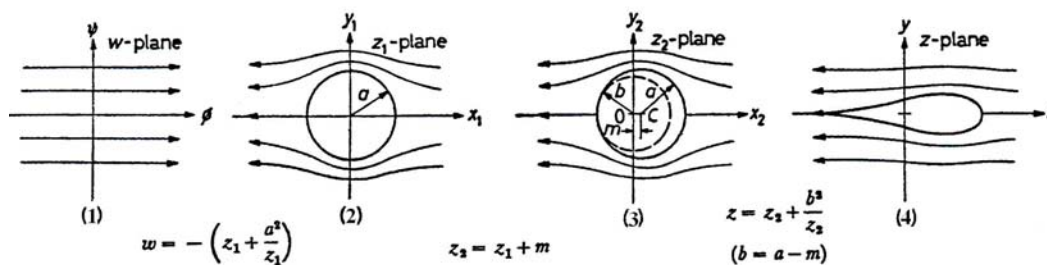
شکل ۸-۱۰: خطوط جریان اطراف یک بیضی (ترکیب جریان یکنواخت و چشمه و چاه)

۸-۸- جریان حول جسم خط جریانی متقارن دو بعدی

اگر در نگاشت قبلی مرکز دایره a روی مبدا مختصات نباشد تقارن در تبدیل از بین می رود. مثلاً اگر ابتدا مرکز دایره a را با تبدیل $z_2 = z_1 + m$ از مبدا به نقطه c که به فاصله $m = oc$ از مبدا مختصات در امتداد محور x ها قرار دارد منتقل کنیم در پروفیل ایجاد شده در صفحه Z تقارن نسبت به محور y ها از بین می رود. با تبدیل زیر مرکز دایره از o به c منتقل می شود:

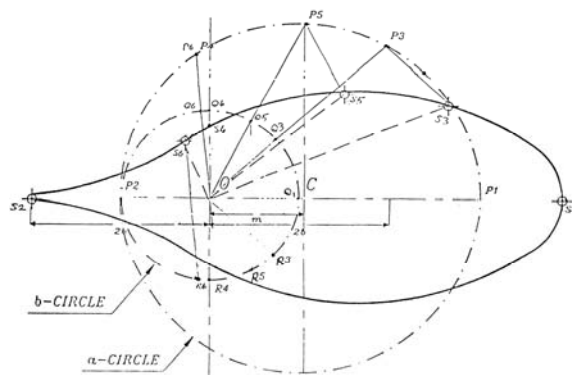
$$z_2 = z_1 + m \quad (۸-۲۱)$$

پس از آن با تبدیل $z = z_2 + b^2 / z_2$ دایره به شعاع b و مرکز o تبدیل به خط مستقیم به طول $4b$ می شود و دایره ای به مرکز o و به شعاع $a+m$ تبدیل به بیضی می شود، اما دایره a به مرکز c تبدیل به شکلی می شود که یک طرفش تقریباً بیضوی و طرف دیگرش افقی و نوک تیز است. این جریان را از طریق گرافیکی مانند حالت های قبل با مراحل نشان داده شده در شکل (۸-۱۱) می توان به دست آورد.



شکل ۸-۱۱: مراحل ایجاد جریان حول جسم دوکی شکل متقارن دوبعدی

نتیجه را پروفیل متقارن خط جریانی یاکوفسکی^۱ می نامند، شکل (۸-۱۲) ایجاد جسم دوبعدی خط جریانی یاکوفسکی را نشان می دهد.



شکل ۸-۱۲: ایجاد جسم خط جریانی متقارن دوبعدی

¹ Joukowski

۸-۹- جریان حول کمانی از دایره

در این حالت نیز ابتدا جریان موازی در صفحه w را به جریان حول دایره ای به شعاع a در صفحه Z_1 منتقل می کنیم.

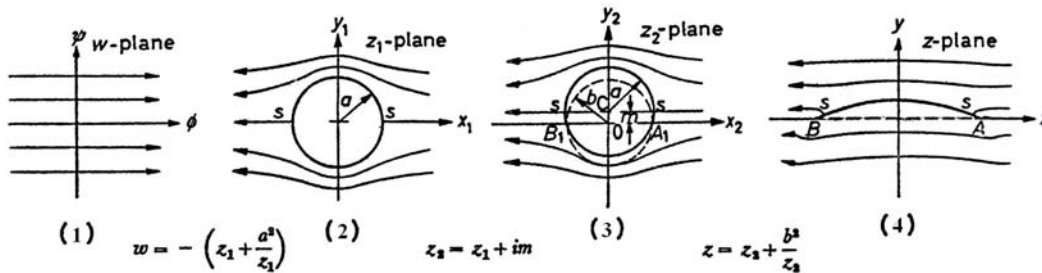
$$w = -\left(z_1 + \frac{a^2}{z_1}\right) \quad (۸-۲۲)$$

سپس مرکز دایره را از O به C در امتداد محور y ها به فاصله کوچک m انتقال می دهیم که این تبدیل از صفحه Z_1 به صفحه Z_2 می باشد.

$$z_2 = z_1 + me^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = z_1 + im \quad (۸-۲۳)$$

و بالاخره برای انتقال به صفحه نهایی Z از تابع تبدیل زیر استفاده می شود که دایره a به مرکز C را تبدیل به کمان AB می کند:

$$z = \left(z_2 + \frac{b^2}{z_2}\right) \quad (۸-۲۴)$$



شکل ۸-۱۳: مراحل ایجاد خطوط جریان اطراف کمان دایره

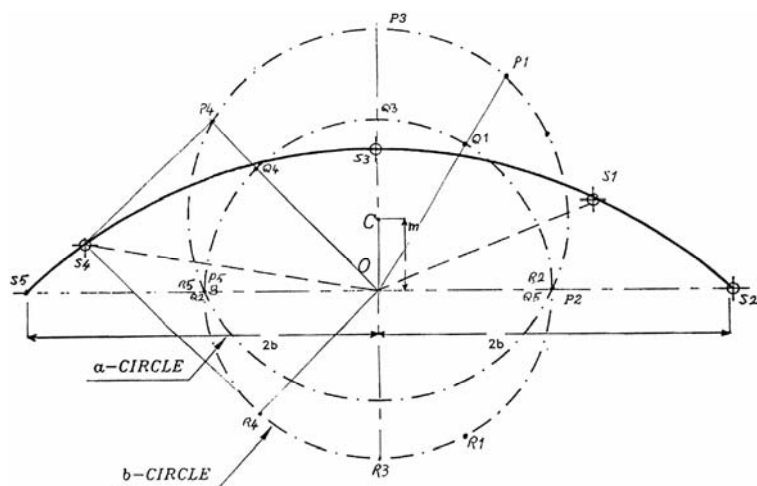
اگر b طوری انتخاب شود که برابر OB_1 باشد در این صورت دایره b تبدیل به خط $AB = 4b$ می شود و دایره a به مرکز C تبدیل به کمان و بقیه جریان تبدیل به جریان حول کمان می شود.

نقاط سکون S در صفحه به روش زیر زیر مشخص می شوند:

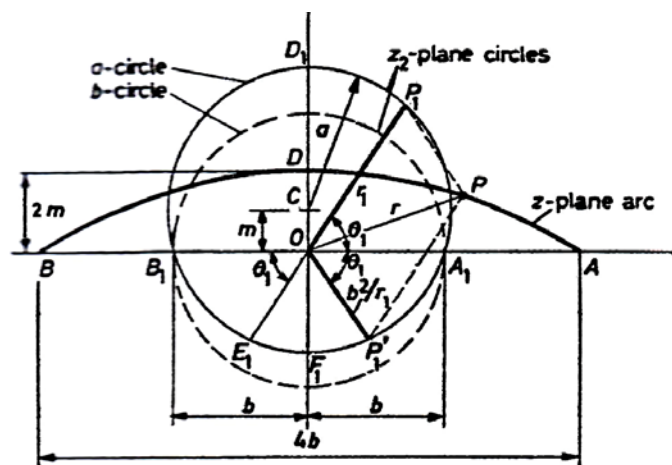
$$\frac{dz}{dz_2} = 1 - \frac{b^2}{z_2^2} = 0 \Rightarrow z_2 = \pm b \quad (۸-۲۵)$$

$$z = \pm b + \frac{b^2}{\pm b} = \pm 2b \quad (۸-۲۶)$$

یعنی از لحاظ تئوری دو انتهای کمان AB ، نقاط منفرد با سرعت های بی نهایت می باشند. شکل زیر رسم گرافیک تبدیل کمان را نشان می دهد. همانگونه که شکل نشان می دهد دایره a به مرکز C و شعاع a و دایره b به مرکز O و شعاع b است.



(الف)



(ب)

شکل ۸-۱۴: الف) ایجاد گرافیکی کمانی از دایره

ب) مشخصات کمان نگاشته شده

به وسیله تقارن $OE_1 = OP'_1 = \frac{b^2}{r_1}$ یعنی p'_1 تصویر معکوس نقطه p_1 نسبت به دایره b است.

بنابراین هر دو قسمت دایره a به کمان در صفحه Z تبدیل می شود، ضمناً تصویر معکوس نقطه F_1

نقطه D است. پس $OF_1 = \frac{b^2}{r_1}$ که $\vec{OD} = \vec{OD}_1 - \vec{OF}_1$ است. وقتی که F_1 روی نقطه D_1 است در

صفحه Z_2 داریم:

$$D_1D = (OD_1 - OD) = OF_1 = \frac{b^2}{r_1} \quad (۸-۲۷)$$

همچنین:

$$OD = (OD_1 - D_1D) = OD_1 - OF_1 \quad (۲۸-۸)$$

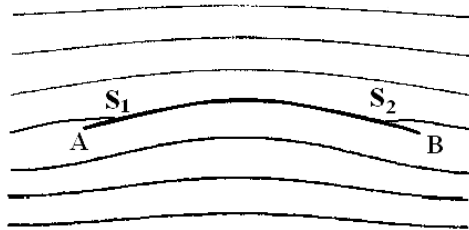
در ضمن:

$$OD = a + m - (OF_1) = (a + m) - (a - m) \quad (۲۹-۸)$$

در نتیجه برای ضخامت مرکزی و طول افقی کمان داریم:

$$OD = 2m \quad (۳۰-۸)$$

$$AB = 4b \quad (۳۱-۸)$$



شکل ۸-۱۵: خطوط جریان اطراف کمائی از دایره

۸-۱۰- جریان حول یک ایرفویل یا هیدروفویل نامتقارن

ابتدا جریان یکنواخت از سمت چپ در صفحه w را به جریان حول دایره ای به شعاع a در صفحه Z_1 منتقل می کنیم.

$$w = -\left(z_1 + \frac{a^2}{z_1}\right) \quad (۳۲-۸)$$

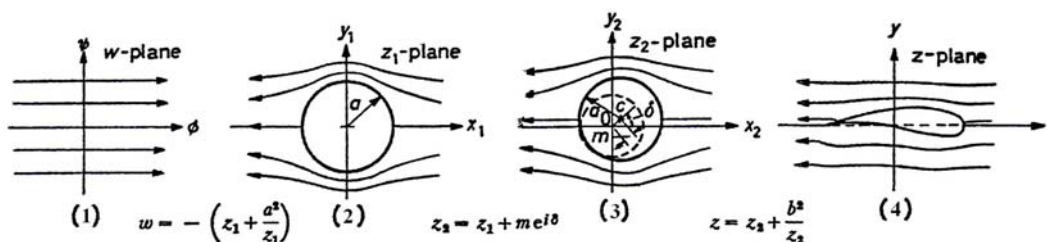
سپس مرکز دایره a را از نقطه o به نقطه c به اندازه $m = oc$ و با زاویه $\hat{cox} = \delta$ تغییر مکان می دهیم. تابع تبدیل برای این تغییر مکان به صورت زیر می باشد:

$$z_2 = z_1 + me^{i\delta} \quad (۳۳-۸)$$

بالاخره تابع تبدیل نهایی از صفحه Z_2 به صفحه Z خواهد بود که به وسیله نگاشت زیر دایره b به شعاع OB_1 تبدیل به خطی به طول $4b$ شده و دایره a (به مرکز c) شکل ایرفویل نامتقارن را پیدا خواهد کرد.

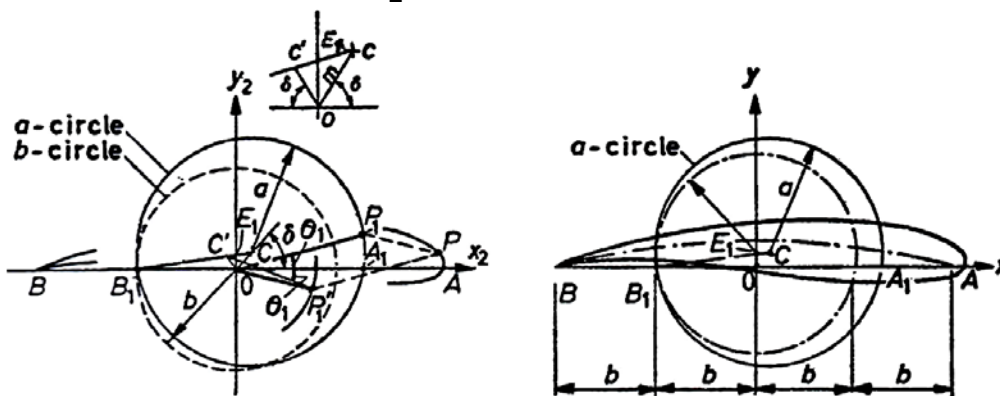
$$z = z_2 + \frac{b^2}{z_2} \quad (۳۴-۸)$$

شکل (۸-۱۶) مراحل ذکر شده را نشان می دهد. با روش گرافیکی می توان شکل دقیق ایروفویل را پیدا کرد.



شکل ۸-۱۶: مراحل ایجاد جریان اطراف یک ایروفویل نامتقارن

با توجه به شکل (۸-۱۷)، دایره به مرکز E_1 و شعاع E_1B_1 به شالوده کمانی با طول $4b$ و ضخامت مرکزی $2OE_1$ تبدیل شده است. در حقیقت، دایره به شعاع a تبدیل به ایروفویلی در صفحه Z می شود که سری گرد شده (پخ) و دم باریک و تیز، و شکل کلی کمانی را دارا می باشد. مقدار پخی و کشیدگی بستگی به فاصله x نقطه c دارد و مقدار کمانی شکل بودن ایروفویل بستگی به فاصله y نقطه c دارد. در این ایروفویل زاویه دم صفر می باشد. با تبدیل $z_2 = z_1 + me^{i\delta}$ مرکز دایره a از نقطه o به نقطه c به فاصله m و زاویه δ نسبت به محور x منتقل می شود در تبدیل از صفحه Z_2 به صفحه Z نقطه B_1 که هم روی دایره b به شعاع $b = OB_1$ و هم روی دایره a است به نقطه B منتقل می شود، نقاط نزدیک B_1 بر روی دایره a به شکلی نزدیک خط تبدیل می شود. P_1' روی دایره ای به مرکز C' و شعاع $C'B_1$ قرار می گیرد و بالاخره کل دایره a تبدیل به ایروفویل می شود. توجه داشته باشید که $OC = m$ بوده و زوایای $\angle C'Oy_2 = y_2 \angle OC = \frac{\pi}{2} - \delta$ برابر هستند.



شکل ۸-۱۷: مشخصات ایروفویل نگاشته شده بصورت نامتقارن

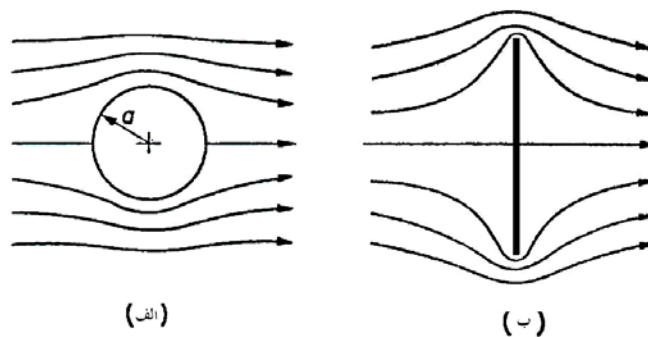
تمرین های فصل هشتم

۱-۸- شکل (الف) زیر خطوط جریان غیر چرخشی اطراف یک استوانه به شعاع a را نشان می دهد.

توضیح دهید که چگونه می توان این حالت را به شکل (ب) تبدیل کرد؟ $\frac{dw}{dz}$ ، نقاط سکون و

نقاط دارای سرعت ماکزیمم را به دست آورید. کدام قسمت شکل (ب) می تواند مدل خوبی

برای جریان حقیقی آب یا هوا عمود بر صفحه باشد؟



شکل ۱-۸-۸: مربوط به تمرین (۱-۸)

۲-۸- نشان دهید که با تبدیلات متوالی $w = z_1 + \frac{a^2}{z_1}$ و $z = z_1 + \frac{b^2}{z_1}$ از صفحه w به صفحه z ،

شکل در صفحه z معادل جریان اطراف یک استوانه با مقطع بیضی می باشد که قطر اصلی

آن در جهت جریان می باشد. در صفات z, z_1, w شکل نسبتاً دقیق چند خط جریان را رسم

کنید و نقاط سکون و نقاط دارای سرعت ماکزیمم را مشخص کنید.

۳-۸- نشان دهید که با تبدیلات متوالی $w = z_1 + \frac{a^2}{z_1}$ و $z = z_2 + \frac{b^2}{z_2}$ و $z_2 = z_1 e^{i\alpha}$ از صفحه w به

صفحه z ، شکل در صفحه z معادل جریان اطراف یک استوانه با مقطع بیضی می باشد که

قطر اصلی نسبت به جهت جریان زاویه α می سازد. در صفات مختلف $z, \dots, z_1, w$ شکل

نسبتاً دقیق چند خط جریان را رسم کنید. در صفحه z محل تقریبی نقطه یا نقاط سکون و

محل تقریبی سرعت ماکزیمم را مشخص کنید. اگر $\alpha = 10^\circ$ قطر های بیضی $1m$ و $0.9m$ باشد، چند نقطه از بیضی را به صورت گرافیکی و دقیق پیدا کنید.

۸-۴ الف- توضیح دهید چگونه می توان جریان غیر چرخشی اطراف یک ایرفویل متقارن با زاویه

حمله صفر ایجاد کرد؟ ب- اگر ایرفویل، نامتقارن باشد، چگونه می توان تابع جریان ψ و

تابع مختلط w را به دست آورد؟ ج- در موارد فوق چگونه می توان توزیع سرعت و توزیع

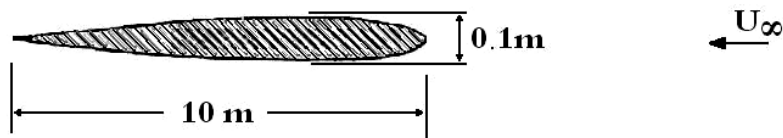
فشار را روی ایرفویل حساب کرد؟ معنی $\frac{dw}{dz}$ چیست؟ د- در چه شرایطی این جریان غیر

چرخشی می تواند مدل خوبی برای جریان حقیقی سیال آب یا هوا اطراف ایرفویل باشد؟

۸-۵ در جریان غیر چرخشی اطراف ایرفویل متقارن شکل زیر در صورتی که طول آن $10 m$ و

ضخامت ماکزیمم $0.1 m$ و سرعت جریان آزاد $U_\infty = 1 \frac{m}{s}$ باشد و مقدار P_∞ برابر یک

اتمسفر باشد:



شکل ۸-۱۹: مربوط به تمرین (۸-۵)

الف- نشان دهید که چگونه می توان به این شکل و جریان غیر چرخشی اطراف آن رسید؟

ب- توابع تبدیل $w = F(z)$ و $\frac{dw}{dz}$ را به دست آورید.

ج- در صفات مختلف $z, \dots, z_1, w$ شکل نسبتاً دقیق چند خط جریان را رسم کنید و نقاط سکون و نقاط دارای سرعت ماکزیمم را مشخص کنید.

د- منحنی توزیع فشار اطراف ایرفویل را با تقریب رسم کنید. آیا این جریان می تواند مدل خوبی برای جریان حقیقی باشد؟

۸-۶- طبق تابع تبدیل $w = -(z_1 + \frac{a^2}{z_1})$ جریان موازی در صفحه w تبدیل به جریان اطراف

استوانه ای با شعاع a می شود. پس از دو تبدیل متوالی دیگر $z_2 = z_1 + me^{i\delta}$ و

$z = z_2 + \frac{b^2}{z_2}$ در صفحه Z دایره تبدیل به یک ایرفویل دوبعدی غیر متقارن نازک بدون زاویه

حمله می شود.

الف- در جریان غیر چرخشی دو بعدی شکل چند خط جریان را نسبتاً دقیق در صفات $z, \dots, z_1, w$ رسم کنید که یکی از این خطوط از نقطه سکون بگذرد.

ب- نقاط سکون را در تمام صفحات $z, \dots, z_1, w$ روی خط جریان بسته (مرز جسم) در شکل مشخص کنید.

ج- در صورتیکه ایرفویل نازک باشد شکل جریان حقیقی سیال مثل هوا یا آب را در رینولدز بالا در اطراف ایرفویل با رسم چند خط جریان با تقریب خوب نشان دهید. در این حالت لایه مرزی را به طور تقریبی در چند ناحیه مختلف اطراف ایرفویل رسم کنید و معادلات حاکم را در قسمتهای مختلف جریان بنویسید.

د- در حالت جریان حقیقی روی ایرفویل، توزیع تنش برشی روی ایرفویل را رسم کنید.

فصل نهم

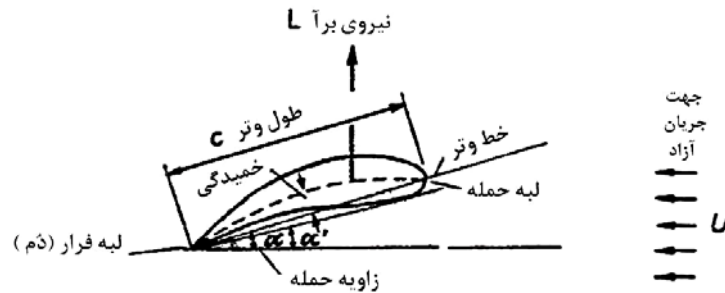
ایروفوویل و هیدروفووویل

۹-۱- اصطلاحات در ایروفوویل و هیدروفووویل

ایروفوویل و هیدروفووویل سازه یا قطعه هایی می باشند که به ترتیب برای به دست آوردن کار مفید در خلال حرکت درون هوا و یا آب طراحی می شوند. ایروفوویل ها در بال و ملخ هواپیماها، موشکها، قایقهای بادبانی و توربین های گازی کاربرد دارند. هیدروفووویل ها بیشتر برای پروانه و تغییر جهت کشتیها، قایق ها و زیر دریایی ها و پمپها و توربین های آبی به کار گرفته می شوند. ایروفوویل ها و هیدروفووویل ها بر دو نوع اند: متقارن و نامتقارن، انواع متقارن دو سطح بالایی و پایینی مشابهی دارند. مرکز فشار آنها تغییر نمی کند. این مرکز در زوایای حمله متفاوت تغییری نمی کند و در یک بازه از سرعت های مختلف نیز ضرایب برآ و پسای مناسبی تولید می کنند و مزیت دیگر آن قیمت پایین تر و ساخت آسان تر آن نسبت به انواع نامتقارن می باشد. انواع نامتقارن دارای گستره وسیع طراحی سطوح بالا و پایین می باشند. در مورد ایروفوویل های نامتقارن، تفاوت و مزایای دیگر آنها ضرایب بالاتر برآ و پسای و شرایط بازدارندگی بهتر نسبت به ایروفوویل های متقارن می باشد. ولی قیمت انواع نامتقارن، بیشتر و فرآیند ساخت آنها پیچیده تر است.

در این مرحله به بررسی مفهوم بعضی اصطلاحات که در رابطه با ایروفوویل ها و هیدروفووویل ها به کار می رود خواهیم پرداخت. در شکل (۹-۱) برخی اصطلاحات مربوط به یک ایروفوویل یا هیدروفووویل مشخص شده است. اجزا ایروفوویل که برخی از آنها در شکل زیر دیده می شوند عبارت اند از:

۱. وتر^۱: خطی که لبه ابتدایی (لبه حمله) و لبه انتهایی ایروفویل را به هم وصل می کند.
۲. طول وتر^۲: طول خط وتر از لبه حمله^۳ تا لبه فرار^۴ برابر c که یک مشخصه طولی ایروفویل است.
۳. خط متوسط خمیدگی^۵: خطی که از هر نقطه وسط بین بالا و پایین ایروفویل می گذرد.
۴. خمیدگی حداکثر: حداکثر فاصله ای که خط متوسط خمیدگی از خط وتر می تواند داشته باشد.
۵. حداکثر ضخامت: حداکثر فاصله سطوح بالایی و پایینی در یک ایروفویل می باشد.
۶. شعاع لبه حمله^۶: شعاع دایره ای می باشد که قابل محاط کردن در لبه ابتدایی ایروفویل می باشد.
۷. زاویه حمله^۷: زاویه α بین وتر و راستای جریان آزاد U می باشد.



شکل ۹-۱: اجزاء یک ایروفویل یا هیدروفویل در مقابل جریان یکنواخت

۸. نیروی پسا^۸: مولفه نیرویی است که از طرف سیال در حال حرکت بر یک جسم در جهت جریان آزاد سیال دور از جسم وارد می شود. آن را با D نشان می دهیم و به صورت زیر بیان می شود:

$$D = \frac{1}{2} C_D \rho A U^2 \quad (۹-۱)$$

که ρ چگالی سیال و U سرعت آزاد سیال در فاصله دور از جسم و A سطح تصویر شده جسم در جهت جریان آزاد و C_D ضریب پسا می باشد.

۹. نیروی برآ^۹: مولفه ای از نیروی وارده از سیال به جسم است که بر جهت بردار سرعت جریان اصلی عمود است. و به صورت زیر بیان می شود:

$$L = \frac{1}{2} C_L \rho A U^2 \quad (۹-۲)$$

¹ Chord line

² Chord length

³ Leading edge

⁴ Treiling edge

⁵ Camber

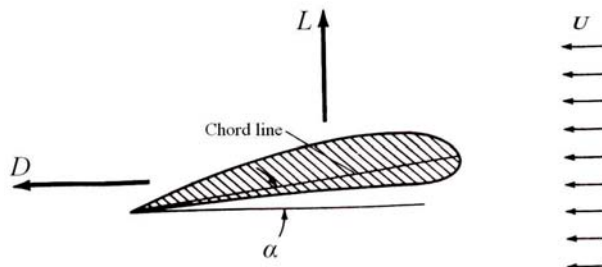
⁶ Leading edge radius

⁷ Angle of attack

⁸ Drag force

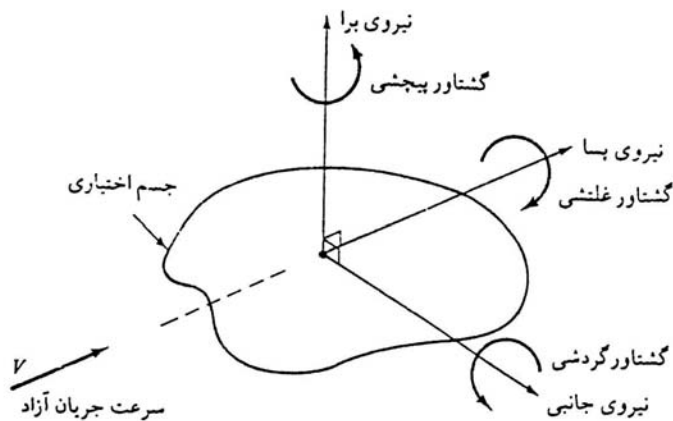
⁹ Lift force

که C_L ضریب برآ است. شکل (۲-۹) نیروهای وارد بر یک ایرفویل یا هیدروفویل دو بعدی با زاویه حمله را نمایش می دهد.



شکل ۲-۹: نمایش نیروهای وارد بر ایرفویل و هیدروفویل دو بعدی با زاویه حمله

در حالت کلی در مورد هر جسم غوطه ور در سیال، سه مولفه نیرو و سه مولفه گشتاور وجود دارد که در شکل (۳-۹) نشان داده شده است.



شکل ۳-۹: نیروهای وارد بر جسم غوطه ور در سیال

اگر جسم دارای تقارن حول محور برآ باشد و به طور مستقیم در برابر جریان حرکت کند مساله به حالت دو بعدی (دو نیرو و یک گشتاور) در خواهد آمد که مورد نظر ماست. تنها مولفه گشتاور، گشتاور پیچشی می باشد که به صورت زیر بیان می شود:

$$M = \frac{1}{2} C_M \rho A_c U^2 \quad (۳-۹)$$

و گشتاورهای چرخشی و گردش صفر است.

۹-۲- پروفیل های ایرفویل و هیدروفویل نازک

در فصل قبل، تبدیل هایی که منجر به ایجاد ایرفویل یا هیدروفویل متقارن و نامتقارن می گردد مورد بررسی قرار گرفت. در این حالتها، در انتهای دم ایرفویل یا هیدروفویل، دو منحنی بالائی و پائینی به یکدیگر مماس می باشند و زاویه آنها صفر است. باید توجه داشت که عملاً ساختن لبه فرار انتهایی (انتهای دم) با زاویه صفر امکان ندارد ولی به کمک تبدیل دیگری می توان زاویه دلخواه را ایجاد نمود که این تبدیل جایگزین تبدیل از صفحه Z_2 به Z می باشد. پروفیل یاکوفسکی^۱ حالت خاصی از پروفیل فون کارمان-ترفتز^۲ است که تابع تبدیل آن به صورت زیر است:

$$\frac{z-nb}{z+nb} = \left(\frac{z_2-b}{z_2+b}\right)^n \quad (۹-۴)$$

و $1 < n \leq 2$ می باشد. بسته به مقدار n می توان زوایای متفاوت در انتهای دم ایجاد کرد که n را معمولاً کمتر از ۲ انتخاب می کنند. پروفیل یاکوفسکی حالت حدی ($n=2$) این پروفیل است. به ازاء $n=2$ داریم $\frac{z-2b}{z+2b} = \left(\frac{z_2-b}{z_2+b}\right)^2$ که با ساده سازی به صورت:

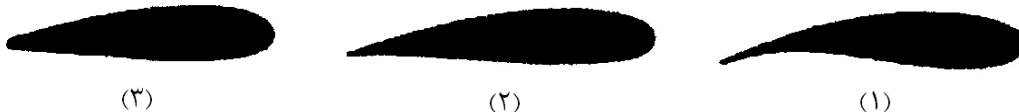
$$z = z_2 + \frac{b^2}{z_2} \quad (۹-۵)$$

در می آید، این همان تبدیل یاکوفسکی است که توسط آن، زاویه دم صفر می شود. تابع تبدیل کارمان-ترفتز می تواند به صورت $z = z_2 + \frac{(n^2-1)b^2}{3z_2}$ نیز در نظر گرفته شود که به ازاء $n=2$ به تبدیل (۹-۵) کاهش می یابد. این تبدیل، پروفیل مناسب ایرفویل و هیدروفویل با دماغه پهن و لبه انتهایی تیز ایجاد می کند. لبه انتهایی ایرفویل یا هیدروفویل همان طور که در شکل (۹-۴) نشان داده شده است سه گونه می باشد:

۱- به صورت نوک پرندگان که لبه پروفیل یاکوفسکی این گونه است و ساخت آن دشوار است.

۲- نقطه ای با مماس های متمایز که لبه پروفیل کارمن-ترفتز این گونه است.

۳- لبه گرد که لبه پروفیل کارافولی این گونه است ولی کارآیی آن پایین است.



شکل ۹-۴: انواع لبه انتهایی ایرفویل و هیدروفویل

¹ Joukowski

² Von Karman-Trefftz

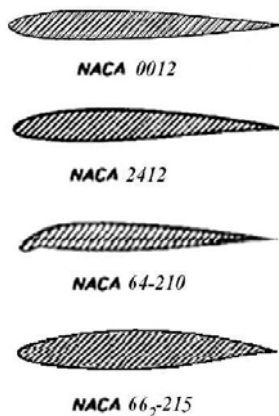
در کاربردهای واقعی، مشخصات ایرفویل ها و هیدروفویل ها بر پایه روشهایی مانند روش خط میانگین و ضخامت، معین می شوند. همچنین برخی مقاطع ایرفویل یا هیدروفویل به صورت سری ۱، ۲ و ... نیز طبقه بندی شده اند. بهترین تقسیم بندی ایرفویل و هیدروفویل های مورد استفاده در کاربردهای واقعی، توسط سیستم $NACA^1$ انجام شده است. در این سیستم، جداسازی خانواده ها با در نظر گرفتن توزیع ضخامت و خمیدگی و کارهای تجربی در اعداد رینولدز بالا انجام شده است. یک دسته از فویل های $NACA$ ، چهار رقمی هستند که این چهار رقم بر اساس هندسه شکل بنا شده اند. رقم اول مقدار بیشینه فاصله خط وتر از خط میانی فویل بر حسب درصد وتر است. رقم دوم نشان دهنده فاصله مکان این بیشینه خمیدگی از لبه حمله به صورت دهم وتر می باشد دو رقم آخر نشان دهنده ماکزیمم ضخامت مقطع بر حسب درصد وتر می باشد. مثلاً $NACA2412$ ایرفویل یا هیدروفویلی با حداکثر خمیدگی برابر با 2 درصد وتر است که فاصله لبه حمله از محل این حداکثر خمیدگی 0.4 طول وتر و ضخامت ماکزیمم 12 درصد وتر می باشد. در صورتی که مقطع متقارن باشد دو رقم اول صفر می باشد مثلاً $NACA0012$ فویل متقارن با ضخامت 12 درصد طول وتر است، شکل (۹-۵) را ببینید. برای یافتن توزیع نقاط این ایرفویل یا هیدروفویل می توان از معادله زیر استفاده کرد.

$$y = \pm \frac{t}{0.2} (0.2969x^{0.5} - 0.126x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4) \quad (9-6)$$

$$x=0 \rightarrow y=0$$

$$x=1 \rightarrow y \approx 0$$

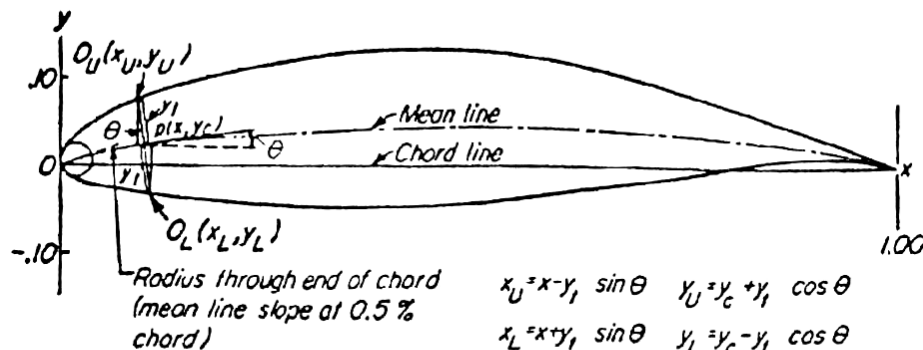
در این معادله، t ضخامت ایرفویل بر حسب درصد خط وتر است که برای $NACA0012$ این مقدار برابر $t = 0.12$ است و مرکز مختصات بر لبه جلویی ایرفویل منطبق می باشد.



شکل ۹-۵: برخی پروفیل های فویل خانواده $NACA$

¹ National Advisory Committee for Aeronautics

دسته دوم مقاطع پنج رقمی می باشد که این ارقام بر اساس ترکیبی از خصوصیت هیدرودینامیکی و هندسه شکل می باشد. رقم اول نشان دهنده مقدار خمیدگی به صورت اندازه نسبی ضریب برآء طراحی است؛ ضریب برآء طراحی، مساوی با یک دهم برابر سه دوم رقم اول است. ارقام دوم و سوم با هم نشان دهنده فاصله مکان بیشینه خمیدگی از لبه حمله است؛ نصف عدد نشان داده شده توسط ارقام دوم و سوم این فاصله را بر حسب درصد وتر بیان می کند. دو رقم آخر نشان دهنده ضخامت فویل بر حسب درصد وتر است. به عنوان مثال در NACA 23015 ضریب برآء طراحی $0.3 = 0.2 \times \frac{3}{2}$ و فاصله مکان بیشینه خمیدگی از لبه حمله $15 = \frac{30}{2}$ درصد وتر و ضخامت حد اکثر 15 درصد وتر می باشد. مثالی از دسته دیگر NACA 66₂ - 215 می باشد: رقم اول، مربوط به نامگذاری دسته است که در این مورد جریان لایه ای است (6). رقم دوم بیانگر مکان فشار حداقل از لبه حمله به صورت دهم وتر می باشد (0.6). یک دهم رقم زیر نویس، ضریب برآء حداکثر در حالت گردایان فشار مطلوب است (0.2). ضریب برآء طراحی، مساوی با یک دهم رقم پس از خط تیره است (0.2). دو رقم آخر نشان دهنده حداکثر ضخامت فویل بر حسب درصد وتر است (15). انواع دیگر تقسیم بندی با روش خط میانی و ضخامت، نیز وجود دارد که نمونه ای از آن در شکل (۶-۹) داده شده است.



Sample calculations for derivation of the NACA 65,3-818 airfoil ($\alpha = 1.0$)											
x	y_1^*	$y_1^\dagger$	$\tan \theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$y_1 \sin \theta$	$y_1 \cos \theta$	x_U	y_U	x_L	y_L
0	0	0				0	0	0	0	0	0
0.005	0.01324	0.00200	0.33898†	0.31932	0.94765	0.00423	0.01255	0.00077	0.01455	0.00923	-0.01055
0.05	0.03831	0.01264	0.18744	0.18422	0.98288	0.00706	0.03765	0.04294	0.05029	0.05700	-0.02601
0.25	0.08003	0.03580	0.06196	0.03979	0.99758	0.00565	0.08073	0.24435	0.11653	0.25565	-0.04493
0.50	0.06593	0.04412	0	0	1.00000	0	0.08593	0.50000	0.13005	0.50000	-0.04181
0.75	0.04456	0.03580	-0.06905	-0.06979	0.99758	-0.00311	0.04445	0.75311	0.08025	0.74689	-0.00865
1.00	0	0				0	0	1.00000	0	1.00000	0

* Thickness distribution obtained from ordinates of the NACA 65,3-018 airfoil.

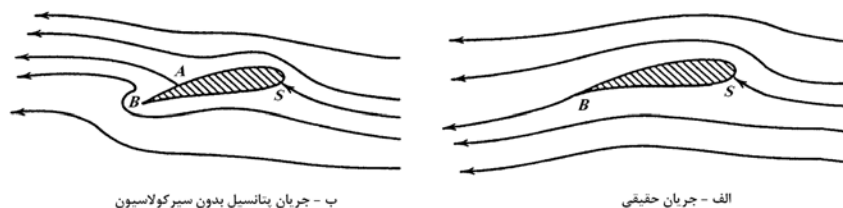
† Ordinates of the mean line, 0.8 of the ordinate for $c_{t_1} = 1.0$.

‡ Slope of radius through end of chord.

شکل ۶-۹: مشخصات نوعی ایرفویل با استفاده از روش خط میانی و ضخامت

۹-۳- شرط کاتا^۱

وقتی یک جسم نازک مثل ایروفویل و هیدروفویل در جریان سیال حقیقی قرار گیرد، بر طبق نتایج تجربی مشاهده می شود که جریان مطابق شکل (۷-۹ الف) به نرمی و آرامی از انتهای دم آن دور می شود.

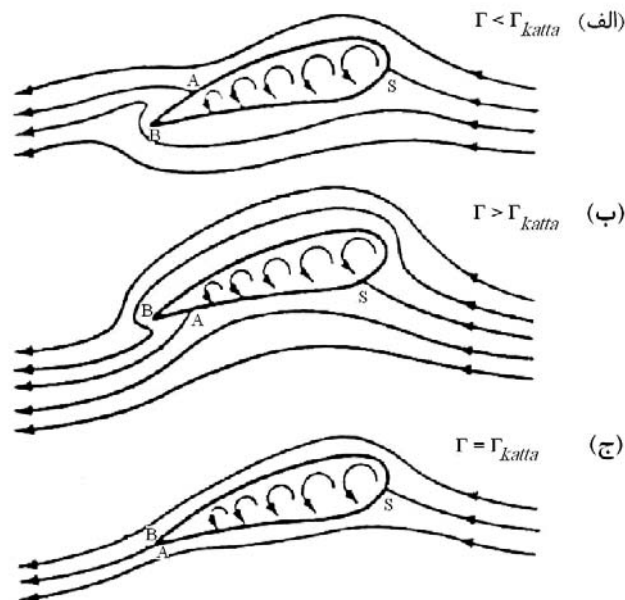


شکل ۷-۹: جریان سیال اطراف یک ایروفویل نازک

در جریان حقیقی یک لایه مرزی اطراف جسم ایجاد می شود که جریان لایه مرزی در انتهای دم در نقطه انتهایی B یک ورتکس ایجاد می شود. در این جریان یک نیروی برآ مشاهده می شود و اگر سرعت خارج از لایه مرزی اندازه گیری شود، می توان نتیجه گرفت که سیرکولاسیون وجود دارد. ولی در جریان پتانسیل شکل (۷-۹ ب) نزدیک دماغه جسم، در نقطه سکون S جریان به دو قسمت تقسیم شده و خط جریانی که از این نقطه می گذرد جریان را به رو و زیر جسم تقسیم می کند و دو قسمت این خط جریان از رو و زیر در پشت جسم در نقطه سکون عقب (یعنی نقطه A) دوباره به هم می رسند. این جریان پس از عبور از زیر جسم پیچ تند را در نقطه B طی می کند و به خاطر این پیچ تند، در جریان ایده آل (غیر چرخشی) سرعت در انتهای دم بی نهایت است که این جریان به هیچ وجه معادل جریان حقیقی نیست و حتی برای سیال با لزجت بسیار کم نیز امکان ندارد که جریان از نقطه B ، در جهت افزایش فشار به طرف A حرکت کند. البته با افزودن سیرکولاسیون، می توان نقطه A را جا به جا کرد. با افزودن یک ورتکس با قدرت مناسب، جریان پتانسیل می تواند با دقت خوب، مشابه جریان حقیقی باشد اگر قدرت سیرکولاسیونی که اطراف جسم انتخاب می شود، خط جریان تقسیم کننده جریان در پشت جسم را به انتهای دم یعنی نقطه B منتقل کند. به عبارت دیگر نقطه سکون A را به انتهای دم یعنی نقطه B برساند. در این حالت شکل جریان مشابه شکل (۷-۹ الف) خواهد شد و سرعت بی نهایت نیز نخواهیم داشت. بنابراین وقتی جریان اطراف اجسام نازک با یک انتهای باریک مورد بررسی قرار می گیرد سیرکولاسیون مناسب جریان پتانسیل که جریان را مشابه جریان حقیقی کند، باید انتخاب شود تا سرعت در انتهای دم محدود باشد. این نحوه

¹ Kutta

کار در ابتدا توسط کاتا پیشنهاد شد و حالتی که سرعت بی نهایت در انتهای دم ایجاد نشود را شرط کاتا می نامند، به طور کلی در صورتی که شرط کاتا رعایت شود توزیع سرعت و فشار به دست آمده و شکل جریان پتانسیل و محاسبه نیروی برآ توافق بسیار خوبی با حالت حقیقی دارند.



شکل ۹-۸: حالت‌های مختلف شرط کاتا

در شکل (۹-۸) حالات مختلف عدم رعایت شرط کاتا (الف، ب) با حالت رعایت شرط کاتا (ج) مقایسه شده است. در این شکل به ترتیب از بالا به پایین حالتی که سیرکولاسیون افزوده شده کمتر، بیشتر و مساوی سیرکولاسیون شرط کاتا باشد، نمایش داده شده است. وقتی سیرکولاسیون دقیقاً برابر سیرکولاسیون شرط کاتا باشد جریان پتانسیل با جریان حقیقی مشابه خواهد بود.

۹-۴- جریان پتانسیل و حقیقی اطراف یک ایرفویل یا هیدروفویل

توضیح داده شد که در عمل در جریان سیال حقیقی برای زوایای حمله کوچک جریان رو و زیر ایرفویل یا هیدروفویل از انتهای دم خارج می شود و نیروی برآ به ایرفویل یا هیدروفویل وارد می شود. مقایسه جریان حقیقی با جریان سیال پتانسیل در ذهن تداعی می کند که برای مشابهت این دو جریان می بایست در جریان ایده آل یک سیرکولاسیون حول جسم اضافه شود تا شکل جریان ایده آل غیر چرخشی در خارج از قشر مرزی به حالت تجربی نزدیک گردد و نقطه سکون به طرف انتهای دم تغییر مکان دهد. در این ارتباط یاکوفسکی بیان کرد برای جلوگیری از به وجود آمدن

گردابه (ورتکس) در پشت جسم باید ورتکس دیگری اطراف جسم و خلاف جهت ورتکس اول در حول جدار ایجاد کرد تا مجموع این دو صفر شود. وقتی نقطه سکون به دم برسد، دلیل به وجود آمدن ورتکس در دم بر طرف می شود و ورتکس ایجاد شده توسط جریان شسته می شود و سیرکولاسیون حول جسم باقی می ماند. ترکیب شرط کاتا و نظریه یاکوفسکی، قانون کاتا-یاکوفسکی نامیده شده است. از این قانون برای محاسبه نیروی برآ در جریان با سرعت U و با سیرکولاسیون Γ حول هر جسم دو بعدی مانند جریان حول استوانه با سیرکولاسیون استفاده می شود. طبق این قانون، در جریان با سرعت U اگر سیرکولاسیون Γ حول هر جسم داشته باشیم، نیروی برآ $\rho U \Gamma$ خواهد بود. البته لازم به ذکر است که در جریان سیال حقیقی، اثرات اصطکاکی سطح و شکل جسم و در نتیجه جدایی جریان، می تواند نتایج کاملاً متفاوتی با آنچه به صورت تئوری پیش بینی می شود، ایجاد کند. ولی برای پروفیل خط جریانی ایروفویل یا هیدروفویل با زاویه حمله کم (تا زوایه حمله ۱۰ درجه)، نتایج تئوری با نتایج آزمایشی خیلی نزدیک است و اگر در جریان حقیقی شکل ایروفویل یا هیدروفویل را به علت وجود لایه مرزی به اندازه ضخامت جابه جایی δ^* تصحیح کنیم و شکل تصحیح شده را به کار ببریم، نتایج تئوری بسیار دقیق خواهد بود. در حقیقت این قانون، اساس محاسبه تئوری نیروی برآ به علت سیرکولاسیون در بال هواپیما، نیروی رانش پره های بادزن و پروانه ها و پره های پمپ و توربین، و نیروی لیفت در سیلندر چرخان و در حرکت سیال اطراف اجسام غیر متقارن می باشد. مشکل اصلی در کاربرد این قانون محاسبه مقدار مناسب سیرکولاسیون (Γ) در هر حالت است. در حالت ایروفویل و هیدروفویل مقدار مناسب سیرکولاسیون Γ همان مقداری است که باعث می شود انتهای دم یک نقطه سکون باشد.

۹-۴-۱- جریان پتانسیل اطراف پروفیل یاکوفسکی با زاویه حمله

معادلات حاکم بر جریان سیال، معادلات ناویر-استوکس می باشد که غیر خطی هستند و حل آنها در شرایط مرزی تقریباً ساده مانند جریان حول استوانه نیز بسیار پیچیده و مشکل است. ولی در حالاتی که جریان را بتوان پتانسیل یا غیر چرخشی فرض نمود معادله پیچیده ناویر-استوکس (در جریان دو بعدی روی صفحه) به معادله خطی لاپلاس تبدیل می شود که حل های زیادی از آن در شرایط مرزی ساده به دست آمده است. همچنین در حالت دو بعدی روی صفحه از روش توابع مختلط، با داشتن یک حل جریان حول یک جسم ساده می توان جریان حول اجسام گوناگون دیگر را به دست آورد. می دانیم در حالت جریان دو بعدی اگر ϕ تابع پتانسیل سرعت و ψ تابع جریان باشد پتانسیل مختلط به صورت زیر تعریف می شود:

$$w = \phi + i\psi \quad (۷-۹)$$

و سرعت مختلط به صورت زیر می باشد که u و v به ترتیب سرعت در جهت X و Y است.

$$\frac{dw}{dz} = u - iv \quad (۸-۹)$$

همچنین در جریان غیر چرخشی، رابطه برنولی در میدان جریان، به صورت زیر برقرار می باشد:

$$p + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) = H \quad (۹-۹)$$

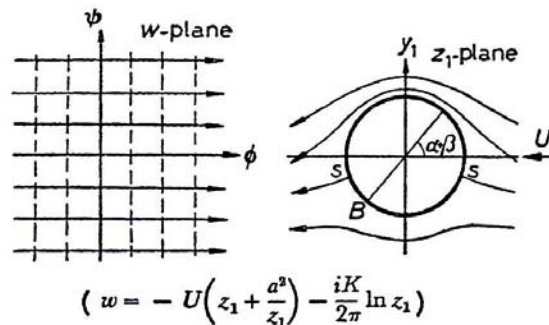
که $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ سرعت و H یک ثابت است.

برای ایجاد شکل جریان پتانسیل اطراف ایروفویل یا هیدروفویل نوع یاکوفسکی که دارای زاویه حمله α باشد، تبدیلات لازم از صفحه W به صفحه فیزیکی Z به قرار زیر است:

۱- ابتدا با تبدیل از صفحه W به صفحه z_1 داریم:

$$w = -U\left(z_1 + \frac{a^2}{z_1}\right) - \frac{ik}{2\pi} \ln z_1 \quad (۱۰-۹)$$

که این تبدیل شکل جریان یکنواخت از راست به چپ با سرعت U در صفحه W را به جریان حول سیلندر به شعاع a و مرکز مبدا مختصات با سیرکولاسیون مخالف جهت عقربه های ساعت در صفحه z_1 تبدیل می کند، شکل (۹-۹) این تبدیل را نشان می دهد. دلیل نامگذاری زاویه داخل شکل به صورت $\alpha + \beta$ بعداً روشن می شود.

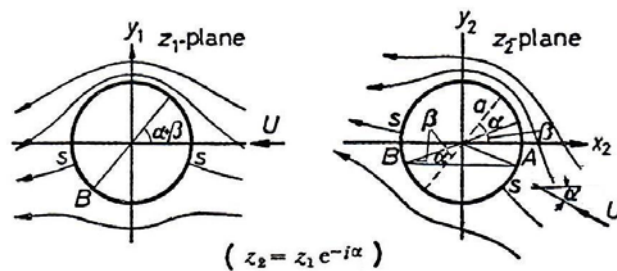


شکل ۹-۹: تبدیل جریان یکنواخت به جریان حول استوانه با سیرکولاسیون

۲- تبدیل دوم، از صفحه z_1 به صفحه z_2 می باشد:

$$z_2 = z_1 e^{-i\alpha} \quad (۱۱-۹)$$

که مطابق شکل (۱۰-۹) باعث چرخیدن الگوی جریان به اندازه زاویه $-\alpha$ (که α زاویه حمله است) می شود.

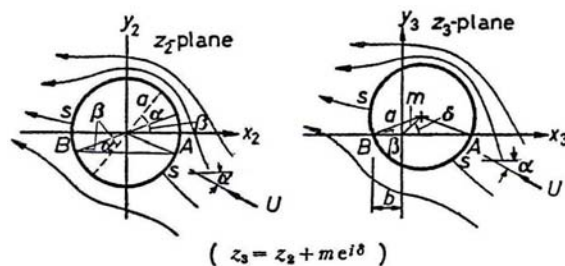


شکل ۹-۱۰: تبدیل ایجاد زاویه حمله در جریان حول استوانه با سیرکولاسیون

۳- سومین تبدیل، از صفحه z_2 به صفحه z_3 است که با تابع انتقال:

$$z_3 = z_2 + m e^{i\delta} \quad (9-12)$$

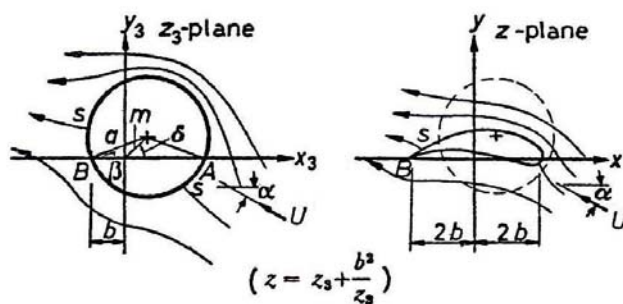
دایره به شعاع a را به فاصله m و زاویه δ از مرکز مختصات جابه جا می کند. این تبدیل در شکل (۹-۱۱) نشان داده شده است.



شکل ۹-۱۱: تبدیل جابجا کردن مرکز استوانه از مرکز مختصات

۴- تبدیل بعدی مطابق شکل (۹-۱۲) انتقال از صفحه z_3 به z با تابع تبدیل یاکوفسکی می باشد:

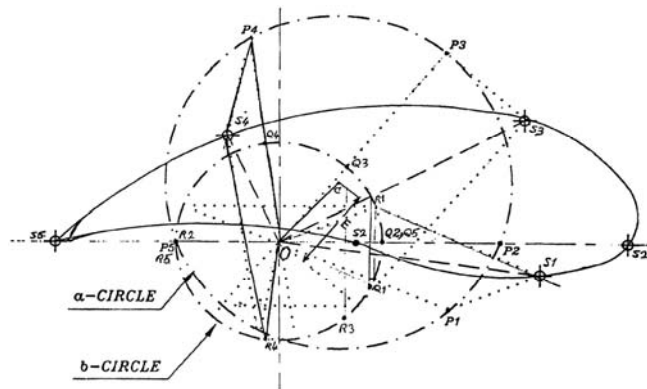
$$z = z_3 + \frac{b^2}{z_3} \quad (9-13)$$



شکل ۹-۱۲: تبدیل نهایی در ایجاد جریان اطراف یک ایرفویل یا هیدروفویل نامتقارن با زاویه حمله

دایره a با مرکز c به آیروفوئیل یا هیدروفوئیل تبدیل شده و دایره b به مرکز مبدا مختصات و شعاع $b = OB$ تبدیل به خطی روی محور x می شود و نقطه B در فاصله $-2b$ قرار می گیرد، شکل (۹-۱۵) را ببینید.

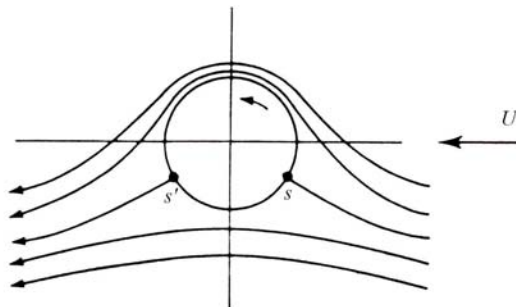
به طور خلاصه ایجاد پروفیل ایرفوئیل یا هیدروفوئیل به صورت نمایش داده شده در شکل (۹-۱۳) می باشد:



شکل ۹-۱۳: ایجاد ایروفوئیل و هیدروفوئیل با پروفیل یاکوفسکی

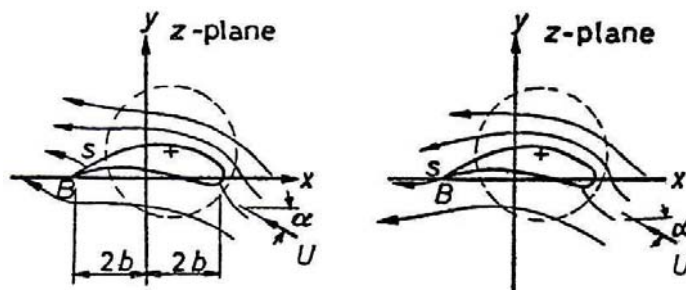
۹-۴-۲- جریان حقیقی اطراف آیرفوئیل و هیدروفوئیل با زاویه حمله

در تئوری جریان پتانسیل برای استوانه با سیرکولاسیون نیروی برآ پیش بینی می شود ولی به علت جدایی در حالت واقعی، مقدار پیش بینی شده به صورت کامل برقرار نمی گردد. جریان پتانسیل حول استوانه با سیرکولاسیون با ترکیب جریان موازی و دوپلت و ورتکس غیر چرخشی به شکل زیر نشان داده می شود.



شکل ۹-۱۴: جریان پتانسیل حول استوانه با سیرکولاسیون

جریان پیرامون یک جسم خط جریانی در ویسکوزیته کم تقریباً مشابه جریان پتانسیل می باشد و به شرط آن که جدایی رخ ندهد می توانیم از نیروی برآ در آن در غلبه بر نیروی وزن استفاده کنیم. این شکل مورد نظر فویل می باشد و همانطور که گفته شد بر اساس محیط کار در هوا و آب به ترتیب آن را ایروفویل و هیدروفویل می نامند. برای ایجاد شکل جریان واقعی اطراف ایروفویل یا هیدروفویل نامتقارن نوع یاکوفسکی که دارای زاویه حمله α و سیرکولاسیون Γ با قدرت لازم k باشد، بایستی مقدار k در رابطه (۹-۱۰) مناسب باشد تا نقطه سکون در پشت ایروفویل یا هیدروفویل به انتهای دم برسد. این مقدار k در حالتی که نقطه B در شکل (۹-۱۵) نقطه سکون باشد و در آن $\frac{dw}{dz} = 0$ گردد، مقدار مطلوب است. و خطوط جریانی مطابق با جریان حول ایروفویل یا هیدروفویل در سمت راست شکل (۹-۱۵) ایجاد می شود که معادل جریان حقیقی حول ایروفویل یا هیدروفویل با زاویه حمله کم است.



شکل ۹-۱۵: با انتخاب سیرکولاسیون مناسب، خطوط جریان حقیقی حول ایروفویل یا هیدروفویل بوجود می آید

سرعت مختلط را می توان بصورت زیر محاسبه نمود:

$$\frac{dw}{dz} = \left(\frac{dw}{dz_1}\right)\left(\frac{dz_1}{dz_2}\right)\left(\frac{dz_2}{dz_3}\right)\left(\frac{dz_3}{dz}\right) \quad (۹-۱۴)$$

در نتیجه:

$$\frac{dw}{dz} = \left[-U\left(1 - \frac{a^2}{z_1^2}\right) - \frac{ik}{2\pi z_1}\right] \frac{e^{i\alpha}}{\left(1 - \frac{b^2}{z_3^2}\right)} \quad (۹-۱۵)$$

با توجه به سرعت مختلط، اگر B نقطه سکون باشد در آن نقطه سرعت صفر است. پس در نقطه مذکور داریم:

$$-U\left(1 - \frac{a^2}{z_1^2}\right) - \frac{ik}{2\pi z_1} = 0 \quad (۹-۱۶)$$

با حل برای k داریم:

$$k = 4\pi U \left(\frac{a^2 / z_1 - z_1}{2i} \right) \quad (۱۷-۹)$$

در این رابطه z_1 مربوط به نقطه B در صفحه z_1 است، این نقطه طبق تبدیلات ذکر شده به نقطه B در صفحه Z منتقل شده است. از صورت رابطه (۱۷-۹)، می توان دید که با جایگزینی $z_1 = ae^{i\theta}$ در این رابطه، عبارتی بر حسب $\frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2i} = -\sin \theta$ به دست می آید. برای اینکه سیرکولاسیون k طوری حاصل شود که انتهای دم یک نقطه سکون باشد طبق شکل (۹-۹) باید $\theta = \alpha + \beta$ در نظر گرفته شود که α زاویه حمله است، زیرا نقطه سکون بر روی وجه پایین دست استوانه دایروی در صفحه z_3 باید در خلاف جهت عقربه های ساعت به اندازه $\theta = \alpha + \beta$ بچرخد. بنابراین با جایگذاری $z_1 = ae^{i(\alpha+\beta)}$ در رابطه (۱۷-۹) خواهیم داشت:

$$\Gamma = -k = 4\pi aU \sin(\alpha + \beta) \quad (۱۸-۹)$$

چون نیروی برآ در واحد عرض آیروفویل یا هیدروفویل $L = \rho U \Gamma$ می باشد، پس:

$$L = 4\pi a \rho U^2 \sin(\alpha + \beta) \quad (۱۹-۹)$$

با در نظر گرفتن ضریب برآ C_L و با توجه به رابطه نیروی برآ $F_L = L = C_L A \frac{1}{2} \rho U^2$ که در آن $A = 4a$ در واحد عرض به طور تقریبی برابر با C طول وتر می باشد، ضریب برآ به صورت زیر به دست می آید.

$$C_L = \frac{L}{1/2 \rho U^2 A} = 2\pi \sin(\alpha + \beta) \quad (۲۰-۹)$$

در مورد جریان پتانسیل حول کمان که در فصل قبل بررسی شد، با توجه به روابط (۳۰-۸) و (۳۱-۸) ضخامت مرکزی کمان $h = 2m$ و طول کمان $c = 4b$ است، می توان نشان داد که برای برقراری شرط کاتا بایستی $\beta = \tan^{-1} \frac{m}{b} \approx \frac{m}{b}$ باشد و بنابراین β برابر $2h/c$ است که زاویه ای مثبت است. برای ایروفویل یا هیدروفویل نیز این زاویه که مشخص کننده کمان ایروفویل می باشد مقداری مثبت است، و می توان نشان داد که در حالت ایروفویل یا هیدروفویل، h ماکزیمم فاصله بین خط میانی با وتر فویل می باشد. بنابراین برای ایجاد ضریب برآ C_L صفر، زاویه حمله باید منفی باشد ($\alpha \equiv -\beta$). در زاویه های کوچک، سینوس زاویه تقریباً به صورت خطی نسبت به زاویه تغییر می کند و مشاهده شده است که تا زاویه حمله ۱۴ درجه، ضریب برآ به صورت تابعی خطی از $(\alpha + \beta)$ تغییر می کند. شکل (۱۷-۹) را ببینید.

۹-۴-۳- تحلیل نیروها در آیروفویل و هیدروفویل

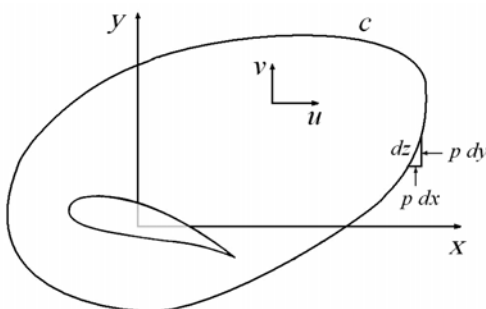
در این بخش به بررسی نیروها و گشتاورهای وارد بر جسم در جریان پتانسیل دو بعدی با تئوری بلازیوس پرداخته می شود. نیروی وارده بر واحد عرض شامل دو مولفه عمود و موازی جریان آزاد می باشد که به ترتیب، برآ Y (یا L) و پسا X (یا D) نامیده می شوند و مقدار گشتاور حول محور Z نیز در برخی محاسبات اهمیت پیدا می کند. برای محاسبه نیروها و گشتاورها باید توزیع فشار و سرعت روی جسم را داشته باشیم که از رابطه برنولی (۹-۹) به دست می آید.

$$H = P_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 = P + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) = P + \frac{1}{2} \rho (u + iv)(u - iv) \quad (9-21)$$

که در رابطه فوق $i = \sqrt{-1}$ است و $i^2 = -1$ می باشد. با توجه به شکل (۹-۱۶) داریم:

$$X = - \int_c p dy \quad (9-22)$$

$$Y = \int_c p dx \quad (9-23)$$



شکل ۹-۱۶: منحنی حول جسم برای محاسبه نیروها و گشتاورها

کمیت مختلط زیر را تشکیل می دهیم:

$$X - iY = - \int_c p dy - i \int_c p dx = - \int_c p (dy + i dx) = -i \int_c p (dx - i dy) \quad (9-24)$$

با جایگذاری فشار از رابطه (۹-۲۱) در رابطه مختلط فوق داریم:

$$X - iY = -i \int_c H (dx - i dy) + \frac{1}{2} i \rho \int_c (u + iv)(u - iv)(dx - i dy) \quad (9-25)$$

با توجه به اینکه اگر $\bar{z} = x - iy$ مزوج مختلط $z = x + iy$ باشد، رابطه $\bar{z}_1 z_2 = z_1 \bar{z}_2$ برقرار است، خواهیم داشت:

$$X - iY = -H \int_c (dy + i dx) + \frac{1}{2} i \rho \int_c (u - iv)(u - iv)(dx + i dy) = \frac{1}{2} i \rho \int_c (u - iv)^2 (dx + i dy) \quad (9-26)$$

چون روی منحنی بسته c انتگرال $\int_c (dy + idx)$ صفر است. در نتیجه:

$$X - iY = \frac{1}{2} \rho i \int_c \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz \quad (۹-۲۷)$$

که در آن $\frac{dw}{dz} = u - iv$ سرعت مختلط است.

به طریق مشابه مجموع ممانهایی که نیروهای dX و dY حول مبدا ایجاد می کنند برابر است با:

$$dM = -y dX + x dY = p(x dx + y dy) \quad (۹-۲۸)$$

dM قسمت حقیقی عبارت $pz d\bar{z}$ است، زیرا:

$$pz d\bar{z} = p(x + iy)(dx - idy) = p(x dx + y dy) + i(y dx - x dy) \quad (۹-۲۹)$$

در نتیجه

$$M = \int_c p(x dx + y dy) = \int_c \operatorname{Re}\{pz d\bar{z}\} \quad (۹-۳۰)$$

$\operatorname{Re}\{ \}$ قسمت حقیقی عبارت مختلط می باشد. با استفاده از رابطه برنولی و ساده سازی به دست می آوریم:

$$M = -\frac{1}{2} \rho \operatorname{Re}\left\{ \int_c \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 z dz \right\} \quad (۹-۳۱)$$

مثال ۹-۱) تابع تبدیل مختلط برای جریان اطراف استوانه a با سیرکولاسیون

$w = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) - \frac{ik}{2\pi} \ln z$ می باشد که U سرعت جریان دور از جسم و k سیرکولاسیون است. نیروهای پسا و برآ و گشتاور پیچشی وارد بر استوانه را محاسبه کنید.

حل - فرض می کنیم مرکز استوانه در مبدأ مختصات باشد. سرعت مختلط برابر است با:

$$\frac{dw}{dz} = U\left(z - \frac{a^2}{z^2}\right) - \frac{ik}{2\pi z}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 &= U^2 \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)^2 + \frac{i^2 k^2}{4\pi^2 z^2} - 2U^2 \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) \frac{ik}{2\pi z} \\ &= U^2 - \frac{iUk}{\pi z} - \left(2U^2 a^2 - \frac{k}{4\pi^2}\right) \frac{1}{z^2} + \frac{iUa^2 k}{\pi z^3} + \frac{U^2 a^4}{z^4} = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \end{aligned}$$

تابع $g(z) = \frac{A_n}{z^n}$ در $z=0$ یک قطب مرتبه n دارد، از انتگرالگیری به روش مانده ها داریم:

$$\int_c g(z) dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [z^n g(z)] \right\} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[z^n \frac{A_n}{z^n} \right] \right\} = \begin{cases} 2\pi i A_n, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

از رابطه (۹-۲۷) و انتگرالگیری به روش مانده ها:

$$X - iY = \frac{1}{2} \rho i \int_c \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz = \frac{1}{2} \rho i (2\pi i A_1) = -\pi \rho A_1 = -\pi \rho \frac{iUk}{\pi} = i\rho U k$$

بنابراین:

$$L = Y = -\rho U k, \quad D = X = 0$$

از رابطه (۹-۳۱) گشتاور پیچشی نیز به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$M = -\frac{1}{2} \rho \operatorname{Re} \left\{ \int_c \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 z dz \right\} = -\frac{1}{2} \rho \operatorname{Re} \left\{ \int_c \frac{A_2}{z^2} z dz \right\} = -\frac{1}{2} \rho \operatorname{Re} \{ 2\pi i A_2 \} = 0$$

معادله (۹-۲۷) تئوری بلازیوس نامیده می شود و برای هر جریان غیر چرخشی دو بعدی روی صفحه، صادق است. انتگرال بسته c را الزاماً نباید بر روی مرز جسم بگیریم بلکه تئوری متغیرهای مختلط و انتگرالگیری به روش مانده ها این اجازه را به ما می دهد تا این انتگرال را بر روی هر مرز بسته ای که جسم را احاطه کرده و فاقد نقطه منفردی در ناحیه بین مرز و جسم باشد محاسبه کنیم. برای اجسام دو بعدی با پروفیل دلخواه که دارای سیرکولاسیون Γ و سرعت دور از جسم U باشند، الگوی جریان اطراف جسم، سرعت مختلط زیر را می دهد:

$$\frac{dw}{dz} = Ue^{i\alpha} + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots \quad (۹-۳۲)$$

در نتیجه:

$$w = Ue^{i\alpha} z + A \ln z - \frac{B}{z} + \dots \quad (۹-۳۳)$$

که در آن α زاویه حمله و اگر سیرکولاسیون Γ ساعتگرد فرض شود $A = -\frac{i\Gamma}{2\pi}$ می باشد.

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = \left(Ue^{i\alpha} - \frac{i\Gamma}{2\pi z} + \dots \right)^2 = U^2 e^{2i\alpha} - \frac{iU\Gamma e^{i\alpha}}{\pi z} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 z^2} \dots = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} \quad (۹-۳۴)$$

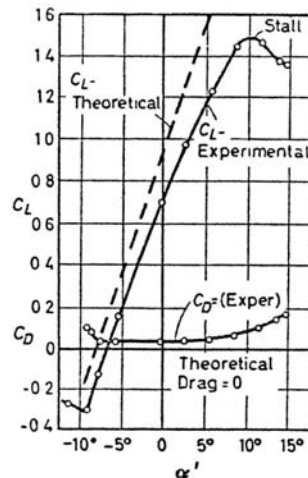
از تئوری بلازیوس و حساب مانده ها داریم:

$$X - iY = -\pi\rho A_1 = \pi\rho \frac{iU\Gamma e^{i\alpha}}{\pi} = i\Gamma\rho U e^{i\alpha} \quad (9-35)$$

اگر $\alpha = 0$ وابستگی به جهت پروفیل جسم از بین می رود و داریم:

$$L = Y = -\rho U \Gamma \quad , \quad D = X = 0 \quad (9-36)$$

به رابطه (۹-۳۶) قضیه کاتا-یاکوفسکی^۱ می گویند که به وسیله آن نیروهای برآ و پسا برای هر جسمی از جمله برای ایرفویل و هیدروفویل قابل محاسبه است. نیروی برآ که به طور تئوری برای ایرفویل و هیدروفویل محاسبه می شود با دقت قابل قبولی با حالت دو بعدی واقعی تطابق دارد. اما هنگامی که زاویه حمله به قدری بزرگ شود که در جریان واقعی، وضعیت جدایی به وجود آید توافق بین تئوری و تجربه از میان می رود. نموداری برای مقایسه رابطه بین زاویه حمله و ضرایب برآ و پسای تئوری و تجربی در جریان اطراف ایرفویل یاکوفسکی در شکل (۹-۱۷) نشان داده شده است. اگر در پروفیل تجربی ضخامت جابجایی نیز اضافه شود نتایج بهترین تطبیق را با هم خواهند داشت.

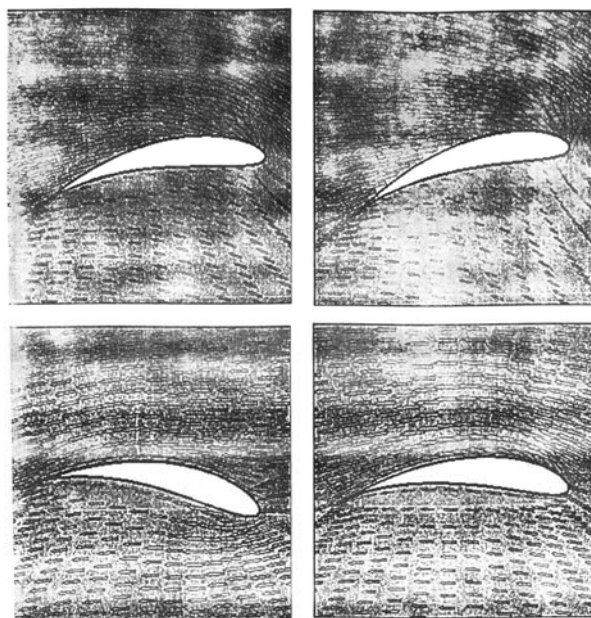


شکل ۹-۱۷: نمودار مقایسه رابطه بین زاویه حمله و ضرایب برآ و پسای تئوری و تجربی در جریان اطراف ایرفویل یاکوفسکی

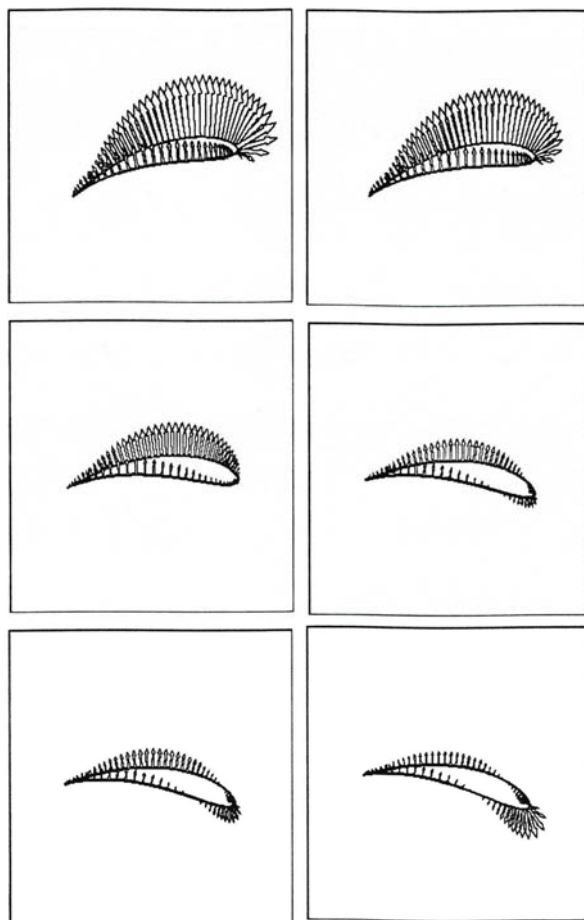
در حال حاضر پروفیل های متفاوت با پروفیل یاکوفسکی نیز مطرح می شوند که دارای C_D کمتری هستند و در آنها حتی تا زوایای حمله بیش از ۱۷ درجه نیز جدایی ایجاد نمی شود.

شکل (۹-۱۸) جریان اطراف ایرفویل در زوایای حمله مختلف را نشان می دهد. فشار وارد بر سطوح ایرفویل یا هیدروفویل در زوایای حمله مختلف به صورت گرافیکی در شکل (۹-۱۹) نمایش داده شده است. همچنین نموداری از ضرایب نیروهای وارد بر نوعی ایرفویل نامتقارن در شکل (۹-۲۰) ارائه شده است.

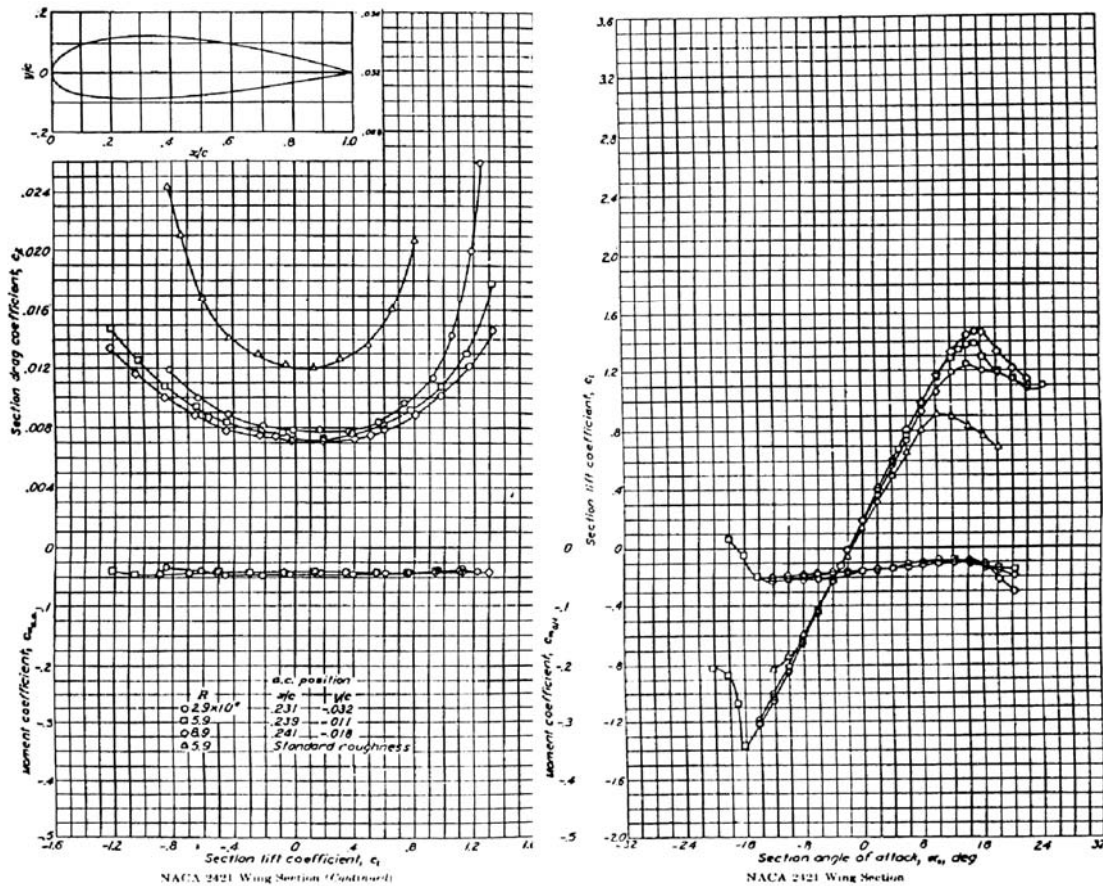
¹ Kutta-Joukowski theorem



شکل ۹-۱۸: جریان اطراف ایروفویل در زوایای حمله مختلف



شکل ۹-۱۹: فشارهای وارد بر ایروفویل در زوایای حمله مختلف



شکل ۹-۲۰: ضرایب نیروها روی یک نوع ایرفویل

۹-۵- اثرات محدود بودن پهنای آیروفویل یا هیدروفویل

تحلیل جریان برای آیرفویل و هیدروفویل در قسمت قبل در حالت آیرفویل و هیدروفویل با پهنای بی نهایت است. یعنی جریان اطراف ایرفویل و هیدروفویل دو بعدی فرض شده و اثرات پروفیل های سه بعدی مخصوصاً اثرات انتهای نوک بال در نظر گرفته نشدند. ولی ایده کاتا-یاکوفسکی در مشخصات ایرفویل و هیدروفویل دو بعدی و جریان اطراف بال، بیشترین تأثیر را در رشته آیروناتیک داشته است. در بال محدود، اثرات جریان به طرف نوک در زیر بال و اثرات جریان به طرف وسط در روی بال، باعث ایجاد صفحه ورتکس و جریان پائین شو^۱ در دنباله می شود. اگر آیرفویل و هیدروفویل را با پهنای محدود در نظر بگیریم نیروی برآ کاهش می یابد و نیروی پسای القایی نیز به وجود می آید.

¹ down wash velocity

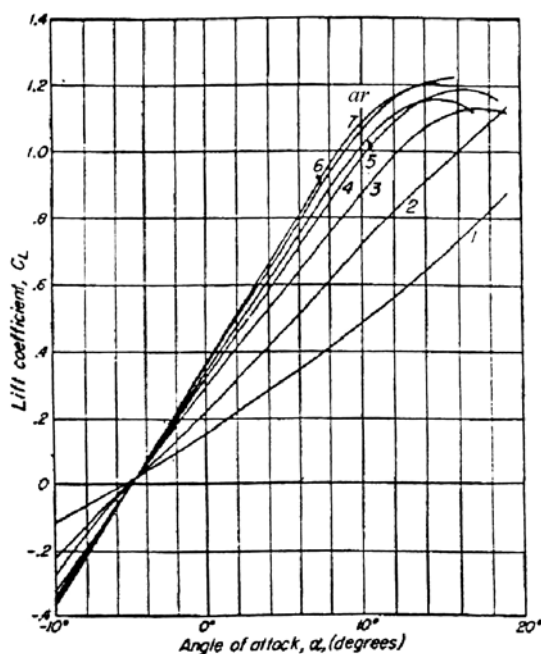
۹-۵-۱- اثر ضریب ظاهری در آیروفویل و هیدروفویل با پهنای محدود

محدود بودن پهنای آیرفویل و هیدروفویل را با ضریبی به نام ضریب ظاهری^۱ ar نشان می دهیم. ضریب ظاهری به صورت نسبت مربع پهنای آیرفویل و هیدروفویل به مساحت تصویر شده آن تعریف می شود.

$$ar = \frac{b^2}{A_p} \quad (۹-۳۷)$$

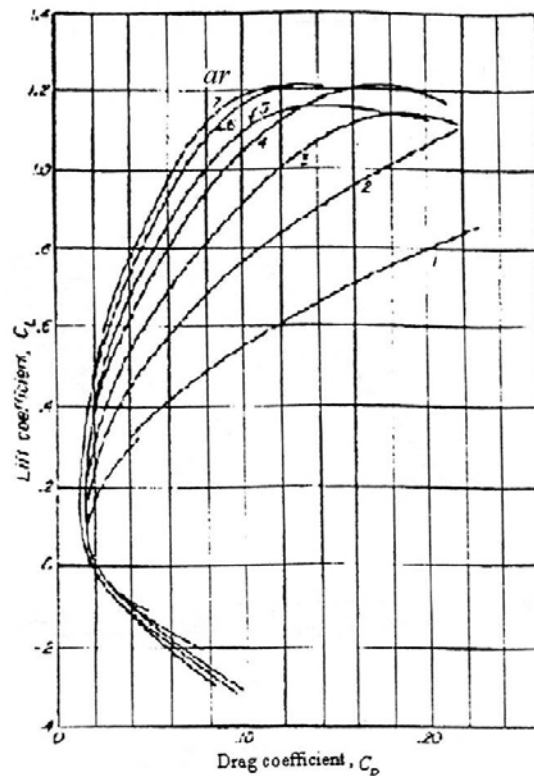
اگر مشخصه ضریب ظاهری را به صورت فوق تعریف کنیم، برای جریان دو بعدی ar بینهایت (∞) خواهد بود و برای پهنای محدود، مقدار دارد (b^2 / A_p) . در آیروفویل و هیدروفویل نازک و با زاویه حمله کوچک به طور تقریبی $A_p = b.c$ که c طول وتر است، بنابراین مقدار ar تقریباً برابر $\frac{b}{c}$ نسبت پهنای به طول، خواهد بود.

اثر ضریب ظاهری بر روی ضرایب نیروی برآ و پسای آیرفویل و هیدروفویل در شکلهای (۹-۲۱) و (۹-۲۲) نمایش داده شده است که نشان می دهند با افزایش ضریب ظاهری نیروی برآ افزایش و نیروی پسا کاهش می یابد.



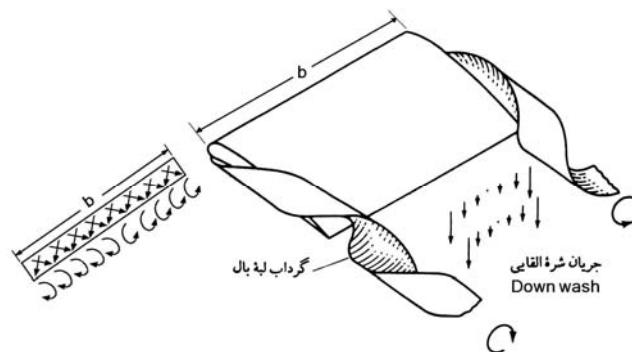
شکل ۹-۲۱: نمودار تاثیر ضریب ظاهری بر نیروی برآ

^۱ Aspect ratio



شکل ۹-۲۲: نمودار تاثیر ضریب ظاهری بر نیروی پسا

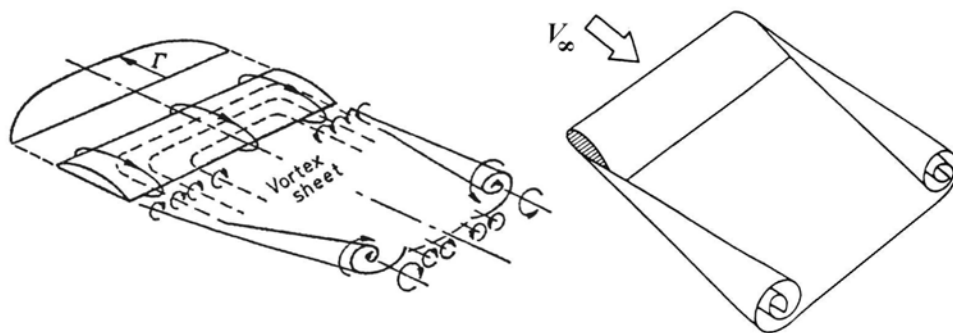
در بررسی ایرفویل و هیدروفویل دو بعدی اثرات و پیچیدگی های پروفیل سه بعدی با پهنای محدود در نظر گرفته نشده است مخصوصا اثرات دو انتهای بال. با توجه به شکل (۹-۲۳) چون فشار روی بال کمتر از فشار زیر بال می باشد، در حالت بال با پهنای محدود، جریان از زیر به رو در کناره ها خواهیم داشت و بطور کلی مانند شکل، سرعت روی بال به طرف مرکز بال بوده و سرعت زیر آن به طرف کناره بال خواهد بود و این باعث ایجاد ورتکس در لبه انتهایی بال و جریان پائین شو در پشت بال می شود.



شکل ۹-۲۳: ایجاد ورتکس در لبه های انتهایی ایرفویل یا هیدروفویل با پهنای محدود

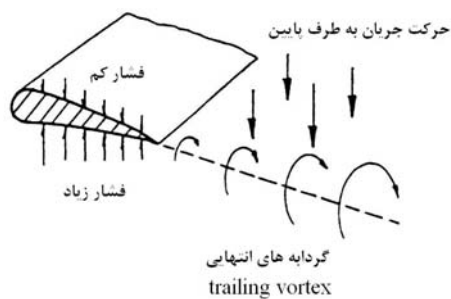
۹-۵-۲- پسای القائی و کاهش نیروی برآ در آیروفویل و هیدروفویل با پهنای محدود

همان طور که پیشتر گفتیم در کناره‌های آیروفویل و هیدروفویل با پهنای محدود، جریان از زیر به رو خواهیم داشت که این باعث ایجاد ورتکس در لبه های انتهایی بال و جریان پائین شو در پشت بال می شود.



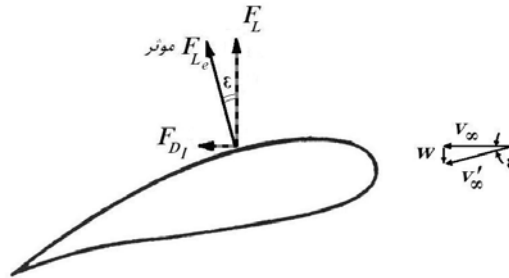
شکل ۹-۲۴: آیروفویل و هیدروفویل با پهنای محدود

مطابق شکل (۹-۲۵)، با ایجاد سرعت پائین شو، همانطور که در شکل (۹-۲۶) نشان داده شده است، سرعت نسبی سیال با آیروفویل یا هیدروفویل، دیگر V_∞ نیست بلکه V'_∞ است. چون سرعت نسبی جریان، مجموع سرعت اصلی V_∞ به طرف آیروفویل یا هیدروفویل و سرعت پائین شو $\vec{W}$ است که مجموع آن $\left| \vec{V}_\infty + \vec{W} \right|$ می باشد. در نتیجه، جریان پائین شو، زاویه حمله را که زاویه بین امتداد سرعت نسبی جریان با امتداد وتر آیروفویل یا هیدروفویل است، تغییر می دهد و باعث می شود زاویه حمله α به زاویه حمله موثر α_e کاهش یابد، در واقع زاویه حمله موثر، زاویه بین خط وتر و سرعت نسبی V'_∞ است و باعث کاهش نیروی برآ و ایجاد نیروی پسای القائی در امتداد جریان اصلی می شود.



شکل ۹-۲۵: پسای القایی ناشی از ایجاد جریان پائین شو

به علت کاهش زاویه حمله ایرفویل یا هیدروفویل به اندازه ε و تغییر سرعت نسبی به V'_∞ نیروی برآ در ایرفویل یا هیدروفویل، کمی کاسته شده و مطابق شکل (۹-۲۶) نیروی پسای القایی یا تحمیلی نیز ایجاد می شود. این نیروی پسای اضافه شده، ناشی از محدود بودن پهنای ایرفویل یا هیدروفویل و ایجاد ورتکس القایی می باشد.



شکل ۹-۲۶: ایجاد نیروی دراگ تحمیلی در ایرفویل و هیدروفویل با پهنای محدود

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_e = \varepsilon = \tan^{-1} \frac{W}{V_\infty} \approx \frac{W}{V_\infty} \quad (۹-۳۸)$$

$$F_L = F_{Le} \cos \varepsilon = \rho \Gamma V'_\infty \cos \varepsilon \approx \rho \Gamma V_\infty \quad (۹-۳۹)$$

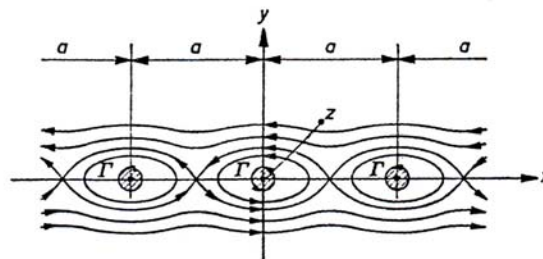
$$F_{Dl} = F_{Le} \sin \varepsilon = \rho \Gamma V'_\infty \sin \varepsilon \approx \rho \Gamma W \quad (۹-۴۰)$$

۹-۵-۳- جریان ردیف بی نهایت ورتکس

ردیف بی نهایت ورتکس با قدرت مساوی k و در فواصل مساوی a طبق شکل (۹-۲۷) را در نظر بگیرید. برای هر ورتکس $\psi_i = -k \ln r_i$ ، پس تابع جریان کل برای بی نهایت ردیف، مجموع آنها می شود:

$$\psi = -k \sum_{i=1}^{\infty} \ln r_i \quad (۹-۴۱)$$

می توان با استفاده از متغیرهای مختلط نشان داد که مجموع لگاریتم های بالا مقداری محدود و به صورت زیر است:



شکل ۹-۲۷: ترسیم جریان ردیف بی نهایت ورتکس

$$\psi = -\frac{1}{2}k \ln \left[\frac{1}{2} \left(\cosh \frac{2\pi y}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right] \quad (۹-۴۲)$$

از رابطه بالا می توان خط جریان های مختلف را به ازاء ثابت های مختلف رسم کرد، ورتکس های رسم شده، یک الگوی چشم گربه ای^۱ در سلول هایی مجزا دارد که جریان خارجی آن را احاطه کرده است. در بالا و پایین چشم گربه ای ها جهت جریان مخالف یکدیگر است.

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \bigg|_{|y| \gg a} = -\frac{\pi k}{a} \frac{\sinh \frac{2\pi y}{a}}{\cosh \frac{2\pi y}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a}} \quad (۹-۴۳)$$

با توجه به اینکه جمله دوم مخرج همواره $-1 \leq \cos \frac{2\pi x}{a} \leq 1$ می باشد، در فاصله $|y| \gg a$ خواهیم داشت:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \bigg|_{|y| \gg a} = \pm \frac{\pi k}{a} \quad (۹-۴۴)$$

بنابراین نوع جریان در فواصل $|y| \gg a$ یکنواخت و با سرعت ثابت می باشد که برای بالا و پایین ورقه ورتکس^۲، جهت سرعتها مخالف هم می باشند. اگر u_L سرعت زیری و u_U سرعت رویی باشد در مورد سیرکولاسیون داریم:

$$d\Gamma = u_L dx - u_U dx = (u_L - u_U) dx = \frac{2\pi k}{a} dx = \gamma dx \quad (۹-۴۵)$$

در این رابطه γ قدرت ورقه ورتکس است که برابر است با:

$$\gamma = \frac{2\pi k}{a} \quad (۹-۴۶)$$

با توجه به روابط فوق، $\gamma = \frac{d\Gamma}{dx}$ یعنی قدرت ورقه ورتکس، برابر با سیرکولاسیون بر واحد طول ورقه می باشد. همانطور که گفته شد، در یک ورقه گردابه $d\Gamma = \gamma dx = \frac{2\pi k}{a} dx$ است که γ قدرت محلی سیرکولاسیون بر واحد طول ورقه می باشد. پس برای ورقه گردابه به طول C :

$$\Gamma = \int_0^C \gamma_{(x)} dx \quad (۹-۴۷)$$

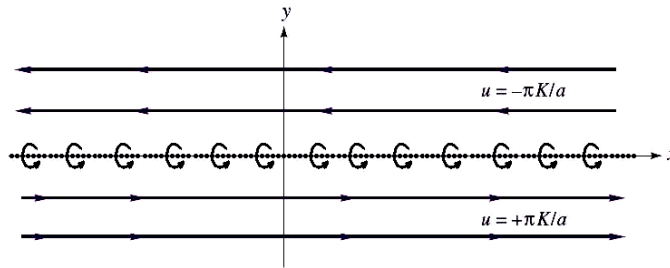
۹-۵-۴- تشبیه ورقه ورتکس به ایرفویل یا هیدروفویل

اگر ورتکس ها در فاصله کم از هم باشند مطابق با شکل (۹-۲۸) می توان دید که ورتکس در روی خط مجتمع شده اند و یک ورقه ورتکس را تشکیل می دهند و جریان قسمت بالا یکنواخت به طرف

^۱ Cat's eyes pattern

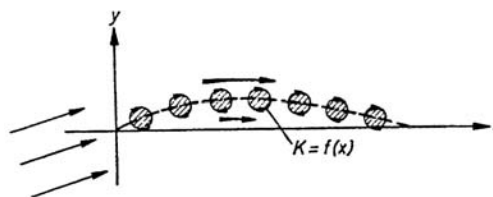
^۲ Vortex sheet

چپ و در پائین یکنواخت به طرف راست می باشد. همانطور که گفته شد قدرت ورقه ورتکس به صورت $\gamma = \frac{2\pi k}{a}$ تعریف می شود و در حالت کلی می تواند با a تغییر کند.



شکل ۹-۲۸: ورقه ورتکس

سرعت عمود بر ورقه ورتکس، روی سطح ورقه صفر است و بنابراین می توان یک ورقه ورتکس را با یک جسم نازک مثل صفحه یا فویل نازک تشبیه کرد، این اساس تئوری ایروفویل و هیدروفویل های نازک است. یک فویل نازک مطابق شکل (۹-۲۹) را می توان با پاره ای از ردیف ورتکس هایی که دارای قدرت متغیر $\gamma(y)$ یا $k = f(x)$ هستند تشبیه کرد. این شکل مفهوم ورقه ورتکس تشبیه شده با یک ایرفویل نازک را نشان می دهد.



شکل ۹-۲۹: تشبیه ورقه ورتکس با قدرت متغیر به ایرفویل یا هیدروفویل نازک

بنابراین اگر مفهوم صفحه ورتکس برای فویل نازک به کار برده شود نیروی برآ برای واحد پهنا در جریان اطراف یک ردیف ورتکس به طول C برابر است با:

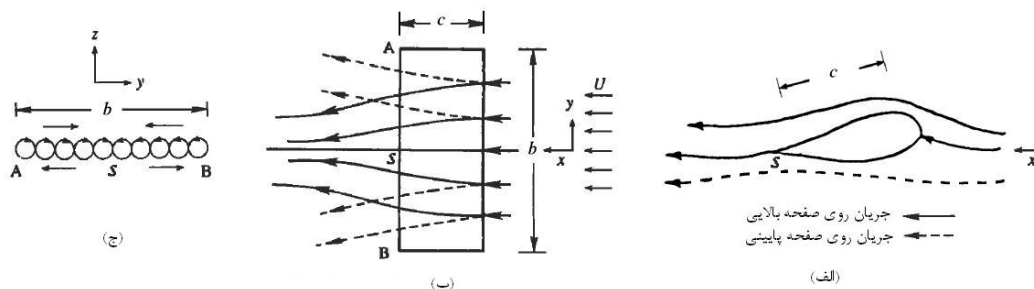
$$F_L = \rho U \Gamma = \rho U \int_0^C \gamma ds \quad (۹-۴۸)$$

که در این رابطه U سرعت نسبی جریان در فاصله ای دور است. اگر فویل نازک و با انحناء کم باشد $ds \approx dx$ بوده و رابطه فوق می تواند تابعی از x به صورت $F_L = \rho U \Gamma = \rho U \int_0^C \gamma dx$ باشد. بسته به قدرت هر ورتکس مقدار γ و Γ می تواند متفاوت باشد ولی فقط یک Γ می تواند جریان تجربی اطراف ایروفویل یا هیدروفویل را ایجاد کند که دم فویل دارای سرعت محدود باشد. می توان جریان اطراف فویل با زاویه کم α را متشابه جریان اطراف یک سری ورتکس با توزیع قدرت خاص در

نظر گرفت. در زاویه حمله زیاد جدائی ایجاد می شود و وضع جریان پتانسیل با جریان حقیقی مشابه نخواهد بود. ولی بر اساس رابطه (۹-۲۰) می توان نشان داد که در زاویه های حمله کوچک برای فویل نازک دو بعدی ضریب برآ، C_L برابر $2\alpha\pi$ می باشد:

$$C_L = 2\pi \sin \alpha \approx 2\alpha\pi \quad (۹-۴۹)$$

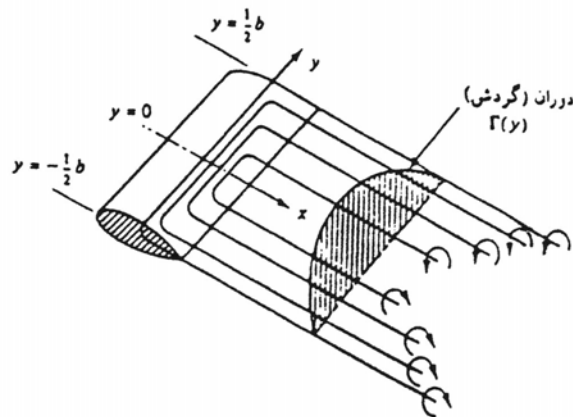
مقدار سیرکولاسیون حول هر منحنی بسته که طول dx از ورقه ورتکس را دربرگیرد $d\Gamma = \frac{2\pi k}{a} dx$ است. یک آیروفویل یا هیدروفویل حقیقی مطابق شکل (۹-۳۰) دارای پهنای محدود b است. پیشتر گفته شد که ضریب ظاهری $ar = b^2 / A_p$ ، در فویل نازک با زاویه حمله کوچک، به نسبت پهنای طول وتر یعنی $ar = b/c$ تبدیل می شود. در فویل محدود چون در زیر آن فشار بیشتر و در بالا فشار کمتر است، در انتهای دو نوک کناره (لبه)، جریان از زیر به رو ایجاد می شود، سرعت در رو به طرف میانه فویل منحرف می شود و در زیر به طرف نوک فویل جهت پیدا می کند، صفحه ورتکس عمود بر جهت جریان ایجاد می شود که این توزیع ورتکس ها در وسط فویل بیشترین قدرت را داشته در دو انتها مقدار آن صفر است.



شکل ۹-۳۰: فویل دو بعدی با پهنای محدود در زاویه حمله کوچک
(الف) نمای جانبی، (ب) نمای بالا، (ج) مقطع ورتکس ها- دم فویل

ورتنکس ایجاد شده در سیال، نمی تواند در یک نقطه تمام شود یا باید به جدار متصل شود و یا یک حلقه بسته را ایجاد کند، لذا اگر یک فویل با پهنای محدود با صفحه ورتکس مدل شود ورتکس ها در انتهای دو نوک نمی تواند خاتمه یابند و می توان در نظر گرفت که خم شده در هم می پیچند و طبق شکل (۹-۳۱) در می آیند که آن را ورتکس نعل اسبی می گویند. به علت ایجاد ورتکس نعل اسبی، در انتهای دم، صفحه ورتکس دیگری عمود بر جهت جریان ایجاد می شود که این توزیع ورتکس ها در وسط فویل کمترین قدرت را داشته در دو انتها (لبه) مقدار آن ماکزیمم است و همین

کاهش قدرت از نوک به وسط باعث ایجاد سرعتی به طرف پائین در مجاورت دم فویل می شود که همان سرعت پائین شو است.



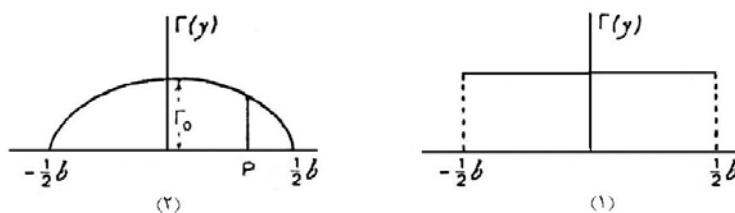
شکل ۹-۳۱: ورتکس نعل اسبی در ایروفویل با پهنای محدود

به علت بی نهایت نبودن پهنای فویل، سیرکولاسیون حول تمام نقاط فویل ثابت نیست و به جای Γ ثابت، $\Gamma(y)$ داریم که در شکل (۹-۳۲) نشان داده شده است. ورتکس Γ محصور در وسط ایروفویل (یعنی Γ_0)، ماکزیمم می باشد و هر چه به دو نوک نزدیک شویم کم شده و بالاخره در انتها، در دو لبه صفر می شوند. در نتیجه نیروی برآ، در ایروفویل با پهنای محدود، کمتر از ایروفویل با پهنای بینهایت خواهد بود و می توان کم شدن نیروی برآ را با افزایش نیروی پسا توجیه کرد. نیروی برآ به صورت زیر است:

$$L = \rho U \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (۹-۵۰)$$

علاوه بر این سرعت پایین شو داریم که جریان را به پایین می راند و در نتیجه نیروی پسای القایی ایجاد می شود که به صورت زیر است:

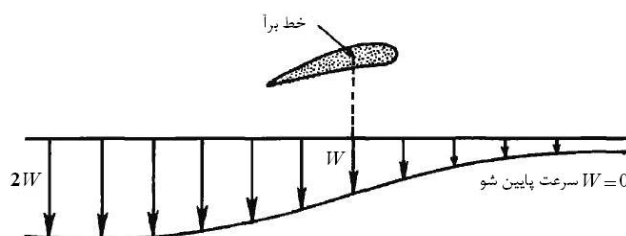
$$D_l = \rho \int_{-b/2}^{b/2} W \Gamma(y) dy \quad (۹-۵۱)$$



شکل ۹-۳۲: توزیع سیرکولاسیون حول ایرفویل و هیدروفویل (۱) پهنای بی نهایت، (۲) پهنای محدود

در محل y_1 روی خط برآ، سرعت پایین شو با توجه به k قدرت سیرکولاسیون و فاصله r از محور ورتکس برابر است با:

$$dW_{(y_1)} = \frac{1}{2} \frac{k}{2\pi r} = (1/2) \frac{-\frac{d\Gamma}{dy} dy}{2\pi(y-y_1)} \quad (9-52)$$



شکل ۹-۳۳: تغییرات سرعت پایین شو از جلو تا پشت فویل

در این رابطه ضریب $1/2$ به معنای متوسط سرعت پایین شو است، زیرا مطابق شکل (۹-۳۳) سرعت پایین شو به طور پیوسته از جلو تا پشت خط برآ در تغییر است. در نتیجه سرعت پایین شو برابر است با:

$$W_{(y_1)} = \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} -\frac{d\Gamma}{dy} \frac{dy}{(y-y_1)} \quad (9-53)$$

در حالت بی نهایت بودن پهنای فویل، سیرکولاسیون Γ حول تمام نقاط فویل ثابت است و در نتیجه $\frac{d\Gamma}{dy}$ صفر بوده و بنابراین سرعت پایین شو و دراگ القایی نیز صفر می شوند.

مثال ۹-۲) برای سیرکولاسیون با توزیع سهموی به صورت $\Gamma = \Gamma_0 \left(1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right)$ در یک ایرفویل، رابطه سرعت القایی پایین شو را روی خط برآ به دست آورید.

حل -

$$\frac{d\Gamma}{dy} = -\frac{8\Gamma_0}{b^2} y$$

$$W_{(y_1)} = \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} -\frac{d\Gamma}{dy} \frac{dy}{(y-y_1)} = \frac{2\Gamma_0}{\pi b^2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{y}{y-y_1} dy$$

با جایگذاری $y = (y-y_1) + y_1$ در صورت کسر داریم:

$$W_{(y_1)} = \frac{2\Gamma_0}{\pi b^2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(y-y_1) + y_1}{y-y_1} dy = \frac{2\Gamma_0}{\pi b^2} \left\{ \int_{-b/2}^{b/2} \frac{y-y_1}{y-y_1} dy + y_1 \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{y-y_1} dy \right\}$$

با انتگرالگیری خواهیم داشت:

$$W_{(y_1)} = \frac{2\Gamma_0}{\pi b^2} \{y + y_1 \ln(y - y_1)\}_{-b/2}^{b/2} = \frac{2\Gamma_0}{\pi b^2} \left\{ b + y_1 \ln \left(\frac{b/2 - y_1}{-b/2 - y_1} \right) \right\}$$

در نتیجه برای $W(y)$ داریم:

$$W(y) = \frac{2\Gamma_0}{\pi b^2} \left[b + y \ln \left(\frac{2y - b}{2y + b} \right) \right]$$

$$W = \frac{2\Gamma_0}{\pi b} \text{ به ازای } y = 0 \text{ داریم}$$

می توان نشان داد که در یک فویل به مساحت معین که دارای نیروی برآء مشخصی است، در صورتی دراگ القایی کمترین مقدار را خواهد داشت که توزیع سیرکولاسیون در آن به صورت زیر باشد.

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \left(1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (۹-۵۴)$$

تابع توزیع سیرکولاسیون فوق، زوج بوده و شرایط $\Gamma_{(y=0)} = \Gamma_0$ و $\Gamma_{(b/2)} = \Gamma_{(-b/2)} = 0$ برقرار است. با در نظر گرفتن توزیع سیرکولاسیون $\Gamma(y)$ با تابع بیضوی فوق به محاسبه نیروهای برآ و پسای القایی خواهیم پرداخت. برای آیروفویل یا هیدروفویل دارای توزیع سیرکولاسیون با تابع بیضوی فوق، می توان نشان داد سرعت پائین شو در خط برآء، ثابت و برابر است با:

$$W = \frac{\Gamma_0}{2b} \quad (۹-۵۵)$$

که Γ_0 مقدار سیرکولاسیون ماکزیمم می باشد. در این حالت، نیروی برآء حاصل عبارت زیر است:

$$L = \rho U \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = 2\rho U \Gamma_0 \int_0^{b/2} \left(1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right)^{1/2} dy \quad (۹-۵۶)$$

با تغییر متغیر $\frac{2y}{b} = \sin \theta$ خواهیم داشت $dy = \frac{b}{2} \cos \theta d\theta$ در نتیجه:

$$\int_0^{b/2} \left(1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right)^{1/2} dy = \frac{b}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi b}{8} \quad (۹-۵۷)$$

بنابراین:

$$L = \frac{\pi b}{4} \rho U \Gamma_0 \quad (۹-۵۸)$$

در نتیجه، ضریب برآء به صورت زیر خواهد بود:

$$C_L = \frac{L}{1/2 \rho U^2 bc} = \frac{\pi \Gamma_0}{2Uc} = \frac{\pi \Gamma_0}{2bU} (a.r) \quad (۹-۵۹)$$

این رابطه نشان می دهد که با میل کردن ضریب ظاهری به سمت صفر (فویل با پهنای ناچیز)، نیروی برآ به صفر میل می کند. در فویل با پهنای کم، زاویه حمله به اندازه ε کاهش می یابد:

$$\Delta\alpha = \varepsilon \approx \frac{W}{U} = \frac{\Gamma_0}{2bU} = \frac{C_L}{\pi(ar)} \quad (9-60)$$

در اثر این کاهش در زاویه حمله، نیروی برآ کاسته شده و نیروی پسای القایی ایجاد می شود. این نیروی پسای اضافه شده یا تحمیلی، ناشی از محدود بودن پهنای ایرفویل یا هیدروفویل و ایجاد ورتکس القایی می باشد که برابر است با:

$$D_l = \rho \int_{-b/2}^{b/2} W \Gamma(y) dy = \frac{\rho \Gamma_0^2}{2b} \int_{-b/2}^{b/2} \left(1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right)^{1/2} dy \quad (9-61)$$

پس از محاسبه انتگرال

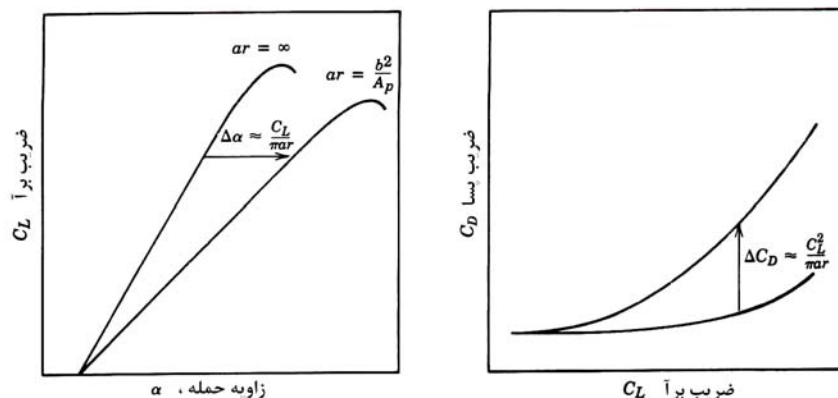
$$D_l = \frac{\rho \Gamma_0^2}{b} \frac{\pi b}{8} = \frac{1}{8} \rho \pi \Gamma_0^2 \quad (9-62)$$

ضریب پسای القایی برابر خواهد بود با:

$$C_{D,l} = \frac{D_l}{1/2 \rho U^2 bc} = \frac{\rho \pi \Gamma_0^2}{4 \rho U^2 bc} = \frac{\pi^2 \Gamma_0^2}{4 U^2 c^2} \frac{1}{\pi b/c} = \frac{C_L^2}{\pi(ar)} \quad (9-63)$$

این رابطه نشان می دهد که با افزایش ضریب ظاهری (فویل با پهنای بینهایت)، دراگ القایی به صفر میل می کند. نمودار شکل (۹-۳۴) روابط بین زاویه حمله و ضرایب برآ و پسا در فویل های با پهنای محدود و نامحدود را مقایسه می کند.

در پایان ذکر این نکته ضروری است که کلیه روابط فوق برای جریان غیر قابل تراکم و برای عدد ماخ زیر ۰/۳ صادق می باشد در ماخ های بالاتر این مقادیر تحت تأثیر اثرات تراکم پذیری قرار می گیرند.



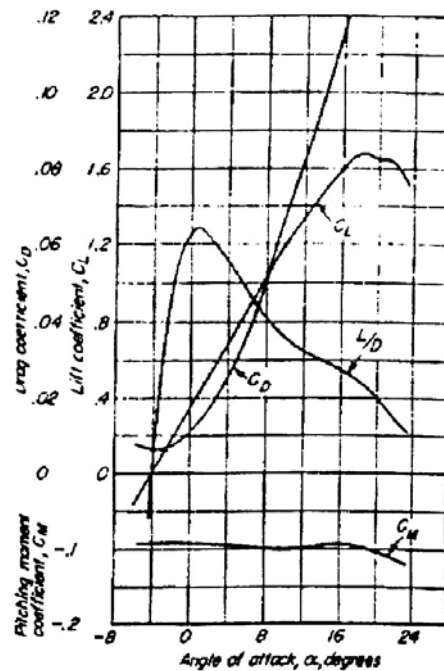
شکل ۹-۳۴: نمودار روابط بین زاویه حمله و ضرایب برآ و پسا در ایرفویل با پهنای محدود و نامحدود

۹-۶- اثرات لزجت (ویسکوزیته)

در جریان پتانسیل، سیال روی مرز جامد سر می خورد ولی در جریان واقعی به علت وجود گرانشی (لزجت یا ویسکوزیته) سیال روی مرز جامد سر نمی خورد بلکه در روی مرز جامد هم سرعت برابر با سرعت جامد می باشد. به همین علت روی اجسام یک لایه اصطکاکی جریان چرخشی تشکیل می شود که در این لایه، سرعت سیال، تدریجاً از سرعت سطح جامد به سرعت میدان پتانسیل میل می کند و ضخامت این لایه بسیار نازک است. به این ناحیه نازک، لایه مرزی گفته می شود.

۹-۶-۱- اثر لزجت بر ضریب پسا

به علت وجود لایه مرزی، نیروی پسای اصطکاکی به وجود می آید که برای محاسبه آن باید از تئوری سیال لزج و لایه مرزی استفاده کرد. در جریان حول ایروفویل و هیدروفویل های باریک و با زاویه های حمله کم، جریان پتانسیل تقریب بسیار خوبی است. همچنین اگر ضخامت جابجایی به دست آمده از تئوری سیال لزج به ضخامت فویل اضافه شود جریان و ضریب برآء به دست آمده از جریان پتانسیل دقیق تر می شود.



شکل ۹-۳۵: نمودار ضرایب نیروهای پسا و برآ و گشتاور پیچشی بر حسب زاویه حمله

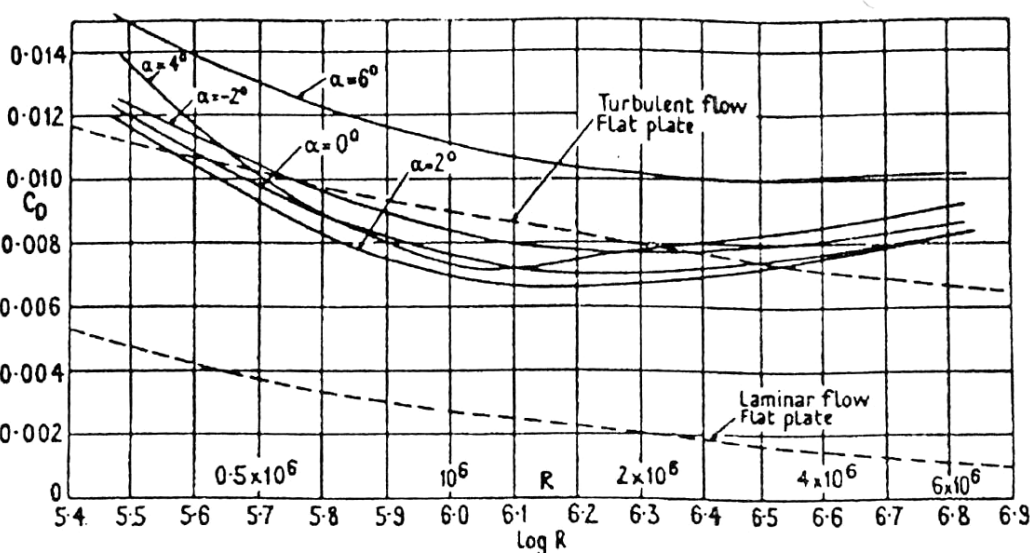
اگر زاویه حمله زیاد باشد یا ایروفویل و هیدروفویل، ضخیم باشند ممکن است به علت ایجاد گرادیان فشار مثبت، پدیده جدایی اتفاق بیفتد، یعنی این که جریان از سطح جدا شده و حالت

برگشتی به خود بگیرد. در این حالت علاوه بر پسای اصطکاکی ناشی از لزجت، پسای فشاری نیز خواهیم داشت و نیروی برآفت شدیدی پیدا می کند. وضعیتی که ضریب برآ، بیشینه است را وضعیت بازدارندگی^۱ و نقطه ای از نمودار ضریب برآ که در آن، ضریب برآ بیشینه است را نقطه بازدارندگی می گویند.

عدد بی بعد نشان دهنده ویسکوزیته، عدد رینولدز است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$R = \frac{U_{\infty} L}{\nu} \quad (۹-۶۴)$$

که L نشان دهنده طول مشخصه جسم می باشد (در مورد ایرفویل و هیدروفویل نازک، طول مشخصه همان طول وتر می باشد). در شکل (۹-۳۶) نمودار تغییرات ضرایب پسا بر حسب عدد رینولدز در زوایای حمله مختلف با ضریب پسا (C_D) برای صفحه تخت در جریان آرام (لایه ای) و مغشوش مقایسه شده اند.



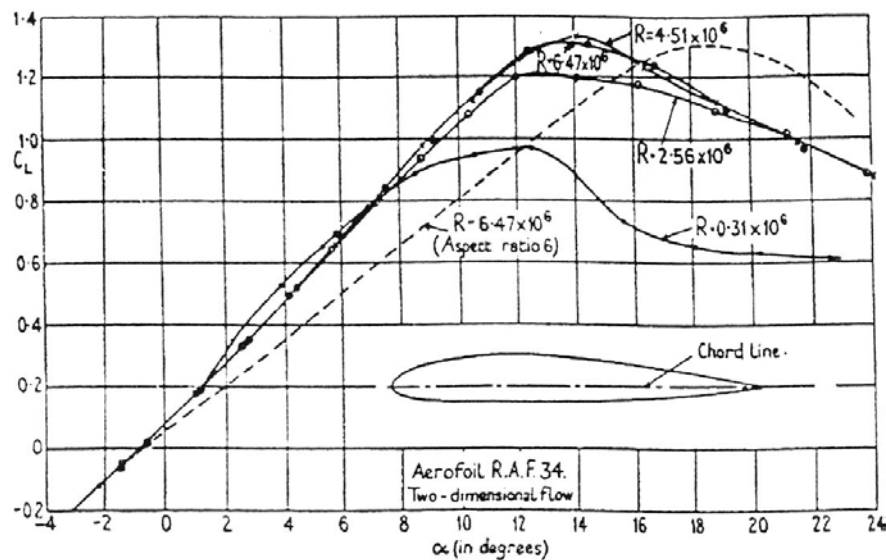
شکل ۹-۳۶: نمودار ضریب پسا بر حسب عدد رینولدز در چند زاویه حمله مختلف

۹-۶-۲- اثر لزجت بر ضریب برآ

در شکل (۹-۳۷) نمودار ضریب C_L که حاصل نیروی برآ در واحد پهنا بخش بر $\frac{1}{2} \rho U_0^2 c$ است، بر حسب زاویه حمله نوعی ایرفویل در عدد رینولدزهای گوناگون نشان داده شده است. دیده می شود که برای هر عدد رینولدز، نمودار ضریب برآ بر حسب زاویه حمله ابتدا به صورت تقریباً خطی

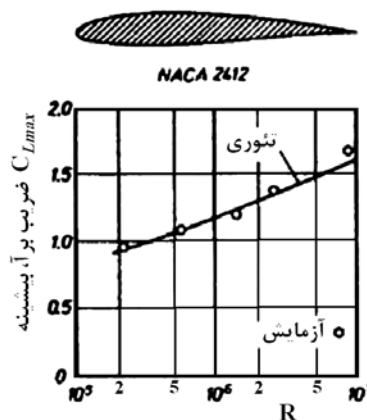
¹ Stall

افزایش می یابد سپس از حالت خطی منحرف می شود تا به نقطه بیشینه که همان نقطه بازدارندگی است می رسد.



شکل ۹-۳۷: نمودار ضریب برآ بر حسب زاویه حمله در چند رینولدز مختلف

شیب بخش خطی منحنی بر حسب رادیان حدود ۵.۷ می باشد. طبق تئوری پتانسیل، شیب این نمودار $2\pi = 6.28$ است، کاهش شیب به علت انحراف جریان از جریان پتانسیل است. در این نوع ایروفویل ضریب برآ بیشینه و زاویه حمله بازدارندگی با عدد رینولدز افزایش می یابد. نموداری از ضرایب برآ بیشینه (تئوری و تجربی) بر حسب عدد رینولدز برای ایروفویل NACA 2412 در شکل (۹-۳۸) نشان داده شده است که این مقایسه، توافق بسیار خوبی را بین تئوری و آزمایش تجربی نمایش می دهد.



شکل ۹-۳۸: مقایسه نمودار ضرایب برآ ماکزیمم در یک ایرفویل بر حسب عدد رینولدز

۹-۷- اثر کاویتاسیون

۹-۷-۱- تعریف کاویتاسیون

کاویتاسیون^۱ (کاواک زایی یا حباب زایی) عبارت است از شکل گیری خود به خودی حباب های کوچک ناپایدار در هر مایعی که در معرض تغییرات (کاهش) عمده فشار قرار گیرد. پدیده کاویتاسیون زمانی در سیال ایجاد می شود که حباب در ناحیه ای از سیال ظاهر شود. این حباب ها معمولاً حاوی بخار سیال یا گازهایی که قبلاً در سیال حل شده و در فشار کم آزاد شده اند می باشند. می دانیم که سیال مقاومت کمی در برابر تنش کششی (برعکس فشار) دارد، بنابراین در بعضی آزمایش های ویژه امکان دارد سیال را به فشارهای بزرگ منفی (فشار بسیار کم) برسانیم بدون این که سیال از هم گسیخته شود. اگر در سیال ذرات معلق یا گاز محلول موجود باشد زودتر گسیخته می شود. منطقی است که یک فشار حدی p_0 وجود دارد که اگر فشار سیال کمتر از آن شود سیال گسیخته می شود. ناحیه ای که از بخار سیال یا گاز پر شده باشد را کاواک می گویند. معمولاً p_0 برابر فشار تبخیر (P_v) مایع در دمای محلی می باشد. بنابراین کاویتاسیون به عنوان نوعی جوشش سیال ظاهر می شود نه بر اثر افزایش دما بلکه بر اثر کاهش فشار. در حالت کلی p_0 به عوامل زیر بستگی دارد.

۱- مقدار گاز حل شده در مایع و درجه حرارت

۲- مقدار و اندازه و شکل ذرات معلق در مایع

۳- طول زمانی که در مدت آن کاهش فشار اعمال می شود

۴- نیروهای موینگی (کشش سطحی)

در کاربردهای عملی p_0 در مقایسه با فشار اتمسفر محیط، بسیار کم است. کاواک (حباب) ها در سیال گستره بزرگی از اندازه دارند بعضی حباب های بسیار کوچک میکروسکوپی (در مراحل آغاز کاواک زایی) و بعضی بزرگ تر از بدنه ای که سیال حول آن جریان دارد هستند. حباب های بزرگ وقتی در جریان ناحیه با فشار بالا وارد شوند فرو می پاشند و یا می ترکند و به حباب های کوچکتر تبدیل می شوند. فروپاشی حباب ها آنقدر ناگهانی است که باعث آسیب به بدنه جسم جامد غوطه ور در مایع می گردد، در لحظه فروپاشی ممکن است فشار محلی در آن نقطه به ۶۰ هزار psi (بیش از چهار هزار اتمسفر) و دما در آن نقطه به ۱۰ هزار درجه سانتی گراد نیز برسد و گاه حتی جرقه بسیار کوچکی هم در زمان بسیار کوتاهی ایجاد شود. این جرقه و موج های فشاری که از فروپاشی حبابها

¹ Cavitation

سطح می شوند قابلیت صدمه زدن دارند. اگر فروپاشی در مجاورت جسم جامد اتفاق افتد باعث خوردگی و حفره زایی و سایش جسم جامد می گردد. این اتفاق مخصوصاً برای فلزات نرم و فولاد نرم بیشتر است ولی میزان فرسایش فولاد سخت و تیتانیم و آلومینیوم کمتر است. کاواک زایی علاوه بر فرسایش و خوردگی در توربو ماشین ها و هیدروفویل ها باعث کاهش کارایی این دستگاه ها نیز می شود. برای پدیده کاواک زایی عدد بدون بعد کاواک زایی (σ) یا عدد کاویتاسیون (σ_c) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sigma = \frac{2(p - p_0)}{\rho U^2} \quad (9-65)$$

که U سرعت سیال در بالا دست جریان در فاصله ای دور از جسم است و ρ چگالی مایع است. شروع کاویتاسیون را می توان از تئوری پتانسیل حل نمود. وقتی فشار نقطه ای از مایع، کمتر از فشار تبخیر شود حباب بخار در مایع ایجاد می شود، بعد از ایجاد کاویتاسیون در میدان جریان حتی خارج از لایه مرزی دیگر رابطه برنولی صادق نیست.

۹-۷-۲- پدیده کاویتاسیون در هیدروفویل ها

آنچه تا بحال گفته شد برای هیدروفویل هایی که در اعماق آب مورد استفاده واقع می شوند و پایینتر از سطح آب و به دور از پدیده کاویتاسیون هستند صادق می باشد. برای هیدروفویل های نزدیک سطح آب، که در معرض کاویتاسیون هستند ضریب پسا مجموعی از ضرایب پسای پروفیل، پسای القایی و پسای موجی است، به عبارت دیگر:

$$C_D = C_{pr} + C_l + C_w \quad (9-66)$$

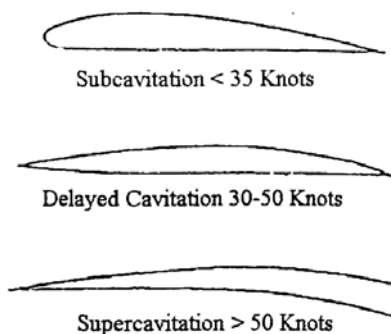
در رابطه فوق C_{pr} ضریب پسای پروفیل، C_l ضریب پسای القایی و C_w ضریب پسای موجی می باشد. ضریب پسای پروفیل نشان دهنده مجموع پسای اصطکاکی و فرمی است. ضریب پسای القایی و چگونگی به وجود آمدن آن قبلاً مورد بحث قرار گرفت. ضریب پسای موجی برای حالت های با سرعت زیاد، تابعی از عدد فرود یعنی نسبت سرعت جریان بر جذر حاصلضرب شتاب جاذبه در طول مشخصه می باشد.

در هیدروفویل ها p_0 برابر p_v فشار بخار اشباع مایع فرض می شود و برای عوامل دیگر عدد کاواک زایی بحرانی σ_c را به طور تجربی به دست می آوریم و با توجه به مقدار عدد بدون بعد کاواک زایی، سرعت بحرانی که در آن کاویتاسیون رخ می دهد این گونه است:

$$U_c = \left(\frac{2(p_\infty - p_v)}{\rho(\sigma_c - C_p)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۹-۶)$$

که p_∞ فشار هیدروستاتیک جریان بالا دست در عمقی که هیدروفویل قرار دارد و C_p ضریب فشار بی بعد $\frac{2(p - p_\infty)}{\rho U_c^2}$ می باشد. بر اساس این سرعت، جریان با کاویتاسیون حول هیدروفویل به سه دسته تقسیم می شود:

- ۱- جریان با حبابهای ریز پراکنده^۱ که سرعت، معمولاً کمتر از سرعت بحرانی است.
 - ۲- جریان با کاویتاسیون تأخیری^۲ که تعداد حبابهای ریز و درشت زیادند و سرعت نزدیک به سرعت بحرانی است.
 - ۳- جریان سوپر کاویتاسیون^۳، با حبابهای به هم پیوسته ورقه ای، که سرعت، معمولاً بیشتر از سرعت بحرانی است.
- این رژیم ها مشابه با رژیم های جریان زیر صوتی، تراصوتی و فراصوتی می باشند. به همین خاطر هیدروفویل هایی را که قرار است در سرعت های بسیار بالا کار کنند مانند آیروفویل های فرا صوتی می سازند و هیدروفویل هایی را که دارای سرعت متوسط و کم هستند مانند آیروفویل های زیر صوتی می سازند. این تفاوت در شکل (۹-۳۹) نشان داده شده است.



شکل ۹-۳۹: سرعت عملکرد بر حسب گره^۴ دریایی برای هیدروفویل های مختلف

با کاهش عدد کاویتاسیون سه رژیم ذکر شده قابل مشاهده هستند. در طی کاهش فشار P ناحیه کاویتاسیون از حبابهای ریز پراکنده به طرف دامنه ای پیوسته (کاویتاسیون تأخیری) تغییر می یابد. با کاهش بیشتر فشار و در نتیجه کاهش عدد کاویتاسیون، حالت کاویتاسیون ورقه ای مشاهده می شود.

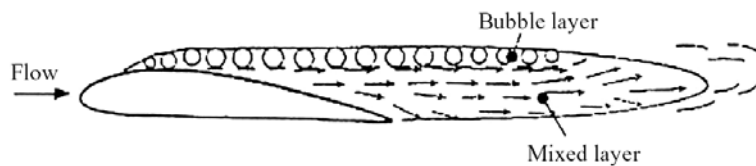
^۱ Subcavitation

^۲ Delayed cavitation

^۳ Supercavitation

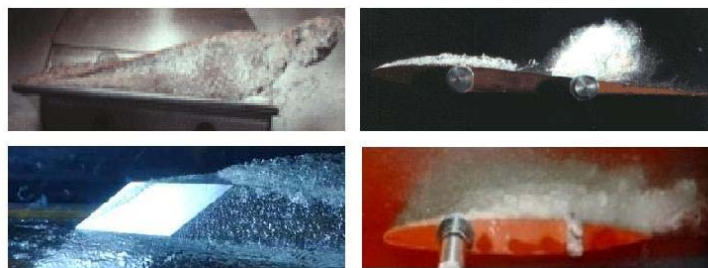
^۴ 1knot = 0.5144 m/s

وقتی عدد کاویتاسیون به مقدار کافی کاهش یابد، اندازه حباب قسمت اعظم ناحیه را می پوشاند، برای نمونه نمودار کلی جریان کاواک را در حالت سوپر کاویتاسیون در یک هیدروفویل دارای شکل مادون کاویتاسیون به صورت شماتیک در شکل (۹-۴۰) نمایش داده شده است. سوپرکاویتاسیون، باعث دور شدن جسم از ناحیه انهدام حبابها و کاهش فرسایش می شود. همچنین در حالت سوپر کاویتاسیون، امکان کاهش ضریب پسا و افزایش ضریب برآ وجود دارد.



شکل ۹-۴۰: نمودار حالت سوپر کاویتاسیون

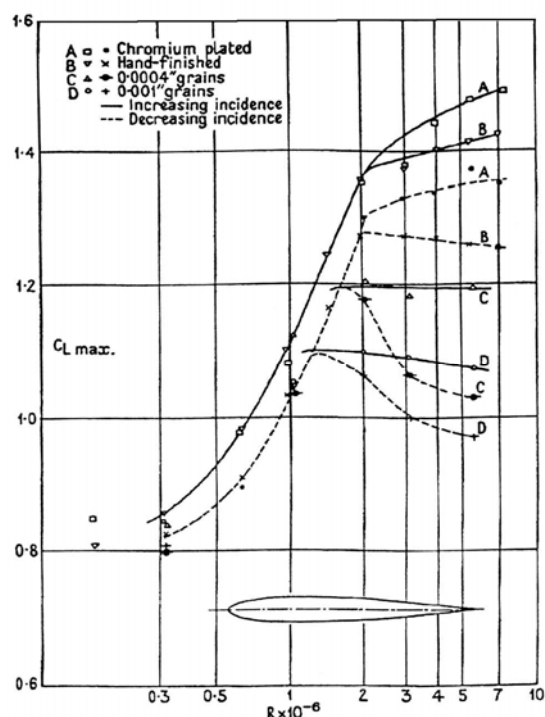
در شکل (۹-۴۱) نیز نتایج آزمایش های تجربی روی هیدروفویل برای حالات گوناگون کاویتاسیون و در زوایای حمله مختلف نشان داده شده است. با بهره گیری از سوپر کاویتاسیون، می توان در سرعت های بالا، برای پرتابه های زیر آب و اژدر و زیردریایی ها و حتی برخی کشتی ها، ضریب پسا و نیروی پسا را کاهش داد.



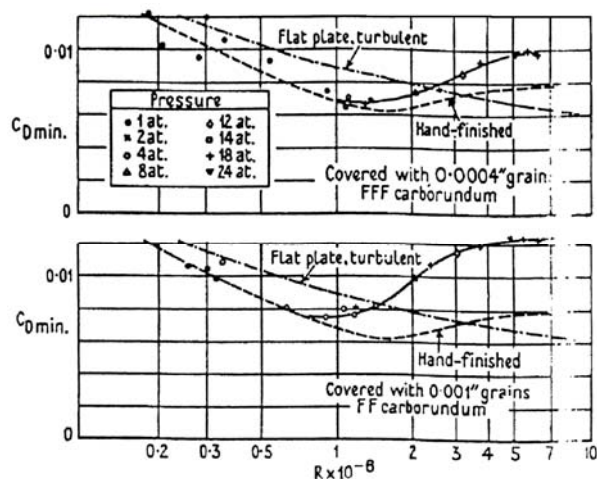
شکل ۹-۴۱: نتایج آزمایش های تجربی روی هیدروفویل در رژیم های گوناگون کاویتاسیون

۹-۸- اثر زبری

سطح یک فویل را زبر گویند، اگر ناهمواری های سطح آن روی نیروهای پسا و برآ اثر کند. مقدار زبری نسبی به صورت نسبت ارتفاع میانگین ناهمواری ها به طول مشخصه جسم تعریف می شود. اگر ناهمواری ها کاملاً در زیر لایه آرام قرار گیرند اثر قابل توجهی روی نیروهای برآ و پسا ندارند ولی در غیر این صورت نمی توان از اثر زبری چشم پوشید، در حالت اخیر زبری باعث آشفته گی زود هنگام می شود. افزایش نیروی پسا و تند شدن شیب ضریب پسا بر حسب عدد رینولدز از اثرات زبری می باشند.



شکل ۹-۴۲: اثر زبری بر نمودار ضریب برآء بیشینه بر حسب رینولدز در NACA 0012



شکل ۹-۴۳: اثر زبری بر نمودار ضریب پسای کمینه بر حسب عدد رینولدز در NACA0012

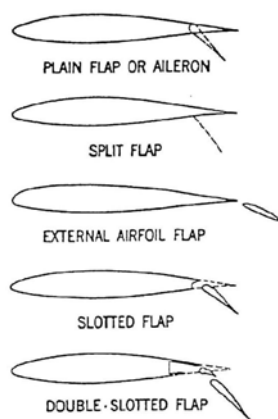
در آزمایش های تجربی برای بررسی اثرات زبری، سطوح فویل را به صورت مصنوعی به وسیله دانه های ریز با ابعاد متوسط مشخصی پوشش می دهند. برای مقایسه، دو نمودار ضریب برآء بیشینه و ضریب پسای کمینه بر حسب عدد رینولدز در شکل های (۹-۴۲) و (۹-۴۳) در فویل نوع NACA0012 نشان داده شده است. طول وتر هشت اینچ و ضریب ظاهری $ar = 6$ می باشد. دیده

¹ Grain

می شود که با افزایش زبری، ضرایب بیشینه برآ کاهش می یابند. البته زبری نیز می تواند باعث تشدید کاویتاسیون و ایجاد سوپرکاویتاسیون شود که در این حالت امکان کاهش ضریب پسا و افزایش ضریب برآ وجود دارد.

۹-۹- اثر دنباله

یکی از روش های بالا بردن نیروی برآ استفاده از دنباله^۱ است. این دنباله ها قابل حرکت هستند و در هر شرایطی برای کارکرد بهینه قابل تنظیم هستند. انواع گوناگونی از دنباله ها وجود دارند مثلاً، دنباله ساده^۲، دنباله جدا کننده^۳، دنباله خارجی^۴، دنباله چاکدار^۵ و . . . که در شکل (۹-۴) نمونه هایی از آنها نشان داده شده است. برای بررسی اثر دنباله بر نیروهای پسا و برآ نمودار ضرایب برآ و پسا برای دو حالت با دنباله و بدون دنباله را مطالعه می کنیم. در شکل (۹-۵) نمودار ضریب برآ برای دو حالت بدون دنباله و با دنباله جدا کننده در دو عدد رینولدز بسیار نزدیک، مقایسه شده است.



شکل ۹-۴: انواع دنباله

دیده می شود که دنباله باعث افزایش ضریب برآ برای همه زوایا حمله می شود ولی تغییر قابل توجهی در زاویه یا نقطه بازدارندگی دیده نمی شود. جریان سیال در لبه تیز دنباله موانع را از سر راه بر می دارد و منطقه کم فشاری پشت آن به وجود می آید. این فرایند باعث افزایش مکش در تمام سطح بالایی می شود ولی تغییرات زیادی در گرادیان فشار در نیمه جلو رخ نمی دهد. فشار زیر

¹ Flap

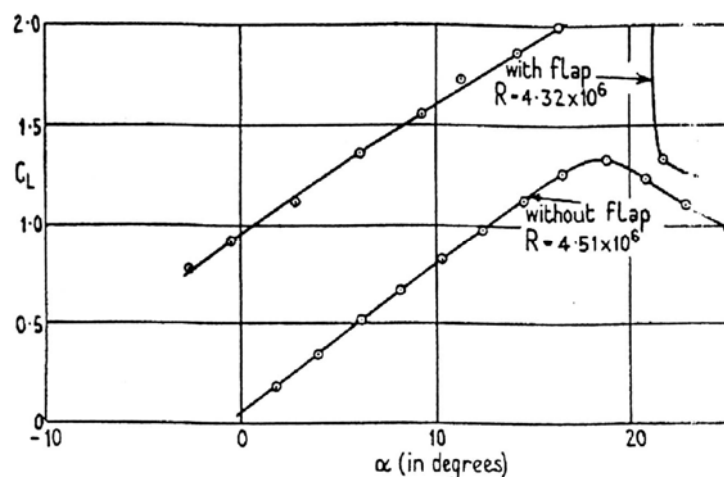
² Plain flap

³ Split flap

⁴ External flap

⁵ Slotted flap

صفحه دنباله نیز افزایش می یابد، این عامل علاوه بر مکش بیشتر در سطح بالایی باعث افزایش زیاد نیروی برآ می شود. همچنین گزارش شده است که ضریب پسا نیز افزایش چشمگیری دارد.



شکل ۹-۴۵: نمودار ضریب برآ بر حسب زاویه حمله در دو حالت بدون دنباله و با دنباله

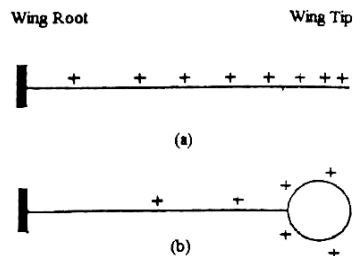
۹-۱۰- محوره‌های مهم تحقیقاتی

از آنچه برای هیدروفویل‌ها گفته شد مشاهده می کنیم که با وجود شباهت ظاهری هیدروفویل و ایرفویل، تحلیل جریان های اطراف هیدروفویل ها به دلیل وجود اختلافات اساسی در مواردی از جمله بزرگتر بودن ضریب لزجت سیالات مرتبط با هیدروفویل ها و پدیده کاویتاسیون، دارای پیچیدگی های بیشتری است. ضریب پسا برای هیدروفویل های نزدیک سطح آب، مجموعی از ضرایب پسای پروفیل، پسای القایی و پسای موجی است که خود نشاندهنده پیچیدگی مذکور است. لذا پژوهش های بسیاری در مورد هیدروفویل ها انجام شده و در حال پیگیری می باشد. در این قسمت به برخی از آنها اشاره می کنیم.

۹-۱۰-۱- اثر لوله دار کردن نوک هیدروفویل

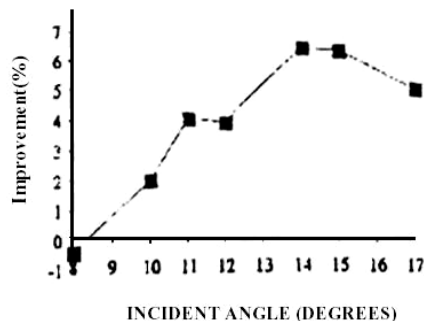
در این بخش به تاثیر نوک لوله دار در هیدروفویل می پردازیم. هندسه نوین نوک هیدروفویل که در شکل (۹-۴۶) نشان داده شده است و شامل لوله ای متصل به نوک هیدروفویل می باشد هم برای آغاز کاویتاسیون و هم برای بهبود پسا و برآ آزموده شده است. اساس طرح نوک لوله دار این است

که باعث شود ایجاد ورتیسسته در صفحه ترفتز به جای خط ساده در هیدروفویل های رایج و معمولی به شکل خطی به همراه دایره ای متصل به آن باشد.



شکل ۹-۶: ایجاد ورتیسستی در صفحه ترفتز در هیدروفویل های معمولی و نوک لوله دار

به علت نوک لوله دار هیدروفویل، ورتیسسته نسبت به خط اصلی هیدروفویل دو بار توزیع می شود. و در نتیجه پسای القایی کاهش می یابد. برای زوایای حمله بزرگ تر از ۸ درجه پسای کل هیدروفویل نوک لوله دار کمتر از هیدروفویل های معمولی است و نسبت برآ به پسای آن در مقایسه با هیدروفویل های معمولی بیشتر است، شکل (۹-۴۷) را ببینید. ولی آزمایش ها نشان داده است که لوله دار کردن سر هیدروفویل هیچ اثری روی بهبود رفتار کاویتاسیون ندارد.



شکل ۹-۴۷: بهبود نسبت برآ به پسا در هیدروفویل نوک لوله دار نسبت به هیدروفویل معمولی

۹-۱۰-۲- مطالعه پدیده کاویتاسیون در هیدروفول دو بعدی

از مشاهدات تجربی به دست می آید که ضخامت لایه مرزی سرعت در جریان کاویتاسیون تقریباً برابر ضخامت کاواک (حفره) و توزیع سرعت مشابه توزیع سرعت در لایه مرزی معمولی می باشد. ولی اغتشاشات سرعت در جریان با کاویتاسیون، خیلی بیشتر از اغتشاشات در جریان بدون کاویتاسیون می باشد. اگر چه جریان داخلی در حالت زیر کاویتاسیون حالت همسانگرد دارد ولی در

حالت فوق کاویتاسیون رفتار بسیار ناهمسانگرد دارد. همچنین جریان برگشتی در حالت گذر از مادون کاویتاسیون به سوپر کاویتاسیون، بسیار ناپایدار است.

۹-۱۰-۳- پدیده کاویتاسیون در هیدروفویل با لبه فرار مستقیم

دیده می شود که در رینولدزهای بالا و زاویه های بسته برای هیدروفویل های با لبه حمله مستقیم در مقایسه با هیدروفویل های بدون لبه فرار مستقیم و هیدروفویل های بیضوی پدیده کاویتاسیون اندکی دیرتر رخ می دهد. رفتار کاویتاسیون در هیدروفویل های لبه فرار مستقیم پیچیده است و دارای سه حالت گوناگون است، یکی برای زاویه های حمله بسیار کوچک که پدیده کاویتاسیون خیلی زودتر از دو نوع هیدروفویل مذکور می باشد؛ دیگر آن که کاویتاسیون ورتکس نوک، پیش از گسترش کاویتاسیون لبه حمله به دست می آید و آخر آن که آغاز کاویتاسیون در حباب جدایی روی سطح بالایی هیدروفویل نزدیک نوک رخ می دهد.

تمرین های فصل نهم

۹-۱- تابع تبدیل $\frac{w+nb}{w-nb} = \left(\frac{z+b}{z-b}\right)^n$ به تبدیل فون کارمن- ترفتز معروف است. نشان

دهید به ازای $n=2$ این تابع، به تبدیل ژاکوفسکی $w = z + \frac{b^2}{z}$ می رسد.

۹-۲- در مورد جریان پتانسیل حول کمان دایروی با زاویه حمله α ، تبدیلات لازم را

بنویسید و نشان دهید که برای برقراری شرط کاتامی بایست

$k = \Gamma = 4\pi aU \sin(\alpha + 2h/c)$ باشد که در آن $h = 2m$ ضخامت مرکزی کمان و

$c = 4b$ طول کمان است.

۹-۳- در جریان اطراف یک ایرفویل متقارن بدون زاویه حمله، ابتدا برای حالت غیر

چرخشی چگونگی به دست آمدن شکل ایرفویل و جریان اطراف آن را به وسیله

توابع تبدیل $w = f(z)$ توضیح دهید و شکل نسبتاً دقیق چند خط جریان و محل

نقاط سکون و نقاط سرعت ماکزیمم را مشخص کنید. سپس فرض کنید جریان

حقیقی هوا اطراف این ایرفویل داشته باشیم، در این حالت شکل چند خط جریان و

نقطه یا نقاط سکون را رسم کنید و منحنی تغییرات فشار و تغییرات تنش برشی در

طول ایرفویل را نشان دهید.

۹-۴- کلیه مراحل تمرین قبل را در حالتی که زاویه حمله 20° درجه باشد تکرار کنید و

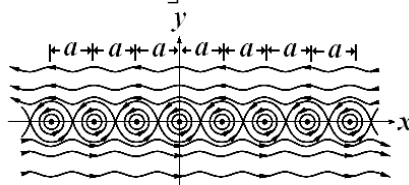
دلایل وجود اختلاف را شرح دهید.

۵-۹- تابع جریان برای بی نهایت ردیف ورتکس به صورت $\psi = -k \sum_{i=1}^{\infty} \ln r_i$ است. بوسیله

یک مثال هندسی و با استفاده از متغیرهای مختلط نشان دهید که مجموع فوق،

مقداری محدود و هم ارز با عبارت زیر است:

$$\psi = -\frac{1}{2} k \ln \left[\frac{1}{2} \left(\cosh \frac{2\pi y}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right]$$



شکل ۹-۴۸: مربوط به تمرین (۵-۹)

۶-۹- الف- اگر توزیع سیرکولاسیون روی یک بال (با دهانه b) به صورت

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \left(1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right)^{1/2}$$

باشد (y در امتداد دهانه بال) نشان دهید که:

$$W(y_0) = \frac{\Gamma_0}{\pi b c} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{y dy}{\left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right)^{1/2} (y_0 - y)}$$

بطوریکه، W سرعت پایین شو در $y = y_0$ و c وتر بال است.

ب- برای آیروفویل یا هیدروفویل دارای توزیع سیرکولاسیون با تابع بیضوی فوق، نشان

دهید که سرعت پائین شو در خط برآ، ثابت و برابر با $W = \frac{\Gamma_0}{2b}$ است.

۷-۹- فرض کنید آیرفویل متقارنی به طول $10m$ و ضخامت ماکزیمم $10cm$ با پهنای $1m$

موجود باشد که با سرعت U_{∞} در هوا به چگالی $1.2 \frac{kg}{m^3}$ با زاویه حمله 10° درجه

در حرکت باشد. نیروی پسای پوسته ای و فشاری و نیروی پسای کل وارد بر این

جسم را در صورت امکان در حالات زیر محاسبه کنید و با نیروی پسای کل وارد بر

یک استوانه با مقطع دایروی به شعاع 10cm مقایسه کنید.

الف- سرعت $1\frac{m}{s}$ باشد.

ب- سرعت $20\frac{m}{s}$ باشد.

۸-۹- در تمرین قبل، توضیح دهید در هر مورد کدام نوع پسا (پسته ای یا فشاری) غالب

است. اگر به جای هوا، آب با سرعت $20\frac{m}{s}$ و $P_{\infty} = 2\text{atm}$ وجود داشته باشد چه

تغییراتی به وجود می آید. فشار بخار آب را $2.34\frac{kN}{m^2}$ فرض کنید.

۹-۹- توضیح دهید برای به دست آوردن مدل جریان غیر چرخشی معادل با جریان حقیقی

هوا اطراف یک ایرفویل غیر متقارن نازک، چگونه باید اقدام کرد. شکل تقریبی

جریان را در صفحات $z, \dots, z_1, w$ رسم کنید و توزیع فشار در زیر و روی ایرفویل

را نمایش دهید.

۱۰-۹- با توجه به توزیع فشار در اطراف ایرفویل نا متقارن تمرین قبل توضیح دهید که چرا

همزمان با ایجاد برآ، گشتاور پیچشی نیز تولید می شود؟ جهت گشتاور پیچشی

ایجاد شده را مشخص کنید.

۱۱-۹- در حالت جریان حقیقی با رینولدز $Re_L > 10^6$ اطراف ایرفویل نازک نا متقارن با

زاویه حمله صفر شکل تقریبی برای ضخامت لایه مرزی و توزیع سرعت را در چند

نقطه روی جسم با تقریب خوب رسم کنید. تغییرات تنش برشی و ضریب فشار

بدون بعد C_p را در جریان حقیقی روی ایرفویل را رسم کنید.

۹-۱۲- در جریان حقیقی هوا اطراف آیرفویل نا متقارن با زوایای حمله $\alpha = 3^\circ$ و

$\alpha = 30^\circ$ شکل تقریبی جریان را با رسم چند خط جریان نشان دهید و نام

قسمتهای مهم در این جریان را در شکل بنویسید و توضیح دهید که در چه نواحی

می توان جریان را غیر چرخشی فرض کرد و در چه ناحیه ای جریان چرخشی

است. تغییرات تنش برشی و ضریب فشار بدون بعد C_p را در جریان حقیقی روی

ایرفویل را رسم کنید.

۹-۱۳- با نوشتن روابط تبدیل و ترسیم چند شکل مراحل تبدیل جریان اطراف استوانه با

سیرکولاسیون به جریان اطراف آیرفویل نا متقارن و با زاویه حمله α را بنویسید.

ضریب بدون بعد $C_p = \frac{P - P_\infty}{1/2 \rho U_\infty^2}$ را روی جسم رسم کنید. مقدار سیرکولاسیون

Γ چقدر باید باشد که جریان غیر چرخشی فوق مشابه جریان حقیقی هوا اطراف

آیرفویل شود.

۹-۱۴- الف- توضیح دهید کاویتاسیون چیست و چرا ایجاد می شود؟

ب- اگر سرعت جریان آب کمتر از 0.3 سرعت صوت در آب باشد ولی کاویتاسیون رخ

دهد آیا جریان را می توان با چگالی ثابت فرض کرد؟

ج- آیا در جریان اطراف یک هیدروفویل با وجود حبابهای بخار می توان از رابطه برنولی

استفاده کرد؟

د- کاویتاسیون در جریان اطراف هیدروفویل ها چه تأثیری در نیروهای برآ و پسا دارد؟

ه- سوپر کاویتاسیون چیست و چه تأثیری در نیروهای پسا و برآ در هیدروفویل دارد؟

و- تفاوت جریان غیر چرخشی و جریان حقیقی سیال آب، اطراف هیدروفویل متقارن با

زاویه حمله ۳۰ درجه و سرعت ۳۰ متر بر ثانیه، با جریان هوا اطراف ایرفویل مشابه با همان

شرایط و سرعتی که اعداد رینولدز جریان هیدروفویل و ایرفویل یکسان شود چیست؟

$$\rho_{\text{water}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad v_{\text{water}} = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\rho_{\text{air}} = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad v_{\text{air}} = 1.5 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

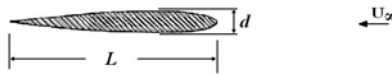
۹-۱۵- اگر برای جسم نازک خط جریانی مطابق شکل زیر بخواهیم در جریان هوا با

$\text{Re}_L = 2 \times 10^6$ ضریب پسای کل را به کمترین مقدار برسانیم باید مطمئن شویم که

جریان در لایه مرزی تا انتهای جسم، به صورت لایه ای باقی می ماند و جدایی رخ

نمی دهد. بررسی کنید که آیا شرط $\frac{d}{L} < \frac{1}{4}$ می تواند این شرایط را ارضا کند؟

$$\rho_{\text{air}} = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad v_{\text{air}} = 1.5 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$



شکل ۹-۸: مربوط به تمرین (۹-۱۵)

فصل دهم

جریان سه بعدی غیر چرخشی

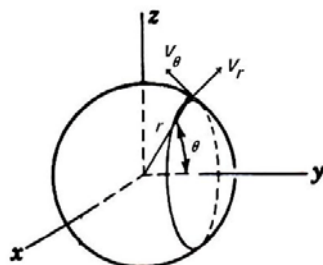
۱۰-۱- جریانهای سه بعدی متقارن محوری

در حالت کلی جریان سه بعدی غیر چرخشی یا جریان پتانسیل نفوذ سیال در محیط متخلخل، لازم است تابع پتانسیلی را به دست آوریم که در معادلات سه بعدی $\nabla^2 \phi = 0$ صادق باشد و شرایط مرزی را هم تامین کند. روش حل موجود در حالت سه بعدی، همساز کروی^۱ می باشد که در اینجا راجع به آن بحث نخواهیم کرد. در حالات خاص جریانهایی را بررسی می کنیم که در آنها، جریان سه بعدی متقارن محوری است و می توان آنها را از روش توأم کردن یا برهم نهش^۲ حل کرد. فقط در جریان سه بعدی متقارن محوری که دو متغیر داریم، تابع جریان قابل تعریف است که به تابع جریان استوکس مشهور است و با تابع جریان دو بعدی روی صفحه یکسان نیست. در مسائل جریان متقارن محوری گاهی با مختصات استوانه ای و گاهی با مختصات کروی سرو کار خواهیم داشت. تابع جریان در یک جریان با تقارن محوری (که حالت خاص سه بعدی با دو متغیر است) قابل تعریف می باشد. در فصول قبل، کم و بیش با مختصات استوانه ای آشنا شده ایم، بنابراین در این فصل به طور مقدماتی به آن نخواهیم پرداخت. از طرف دیگر، در مباحث این فصل، کاربرد مختصات

^۱ Spherical harmonic

^۲ Superposition

قطبی یا کروی سودمندتر است زیرا جریان پتانسیل باتقارن محوری به راحتی در مختصات کروی قابل بررسی است. در این حالت فقط دو محور (r, θ) وجود دارد و مطابق شکل (۱-۱۰) مشخصات جریان روی دایره ای به شعاع $r \sin \theta$ حول یک محور ثابت مورد نظر می باشد.



شکل ۱-۱۰: مشخصات جریان روی دایره ای به شعاع $r \sin \theta$ در مختصات کروی

رابطه پیوستگی برای جریان غیر قابل تراکم متقارن محوری در مختصات کروی به صورت

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r V_\theta \sin \theta) = 0 \quad (1-10)$$

می باشد که مطابق شکل (۱-۱۰) V_θ, V_r مولفه های شعاعی و مماسی سرعت هستند. بنابراین یک تابع جریان قطبی کروی $\psi(r, \theta)$ موجود است به طوری که:

$$V_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{و} \quad V_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2-10)$$

۱-۱-۱۰- تابع پتانسیل جریان های ساده متقارن محوری

طبق تعریف تابع پتانسیل، سرعت در هر جهت مشتق تابع پتانسیل در امتداد آن جهت است. این تعریف، محدود به جریان دو بعدی نمی باشد و در مختصات قطبی نیز داریم:

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad \text{و} \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (3-10)$$

از این روابط می توان برای جریان های ساده متقارن محوری و غیر چرخشی، تابع جریان و تابع پتانسیل را نتیجه گرفت. ضمناً از تعریف خط جریان در مختصات قطبی در امتداد خط جریان داریم

$$\frac{dr}{V_r} = \frac{r d\theta}{V_\theta} \quad \text{در نتیجه:}$$

$$V_r r d\theta - V_\theta dr = 0$$

با جایگذاری از (۲-۱۰) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} dr = 0$$

بنابراین:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \psi}{\partial r} dr = d\psi = 0$$

پس در امتداد هر خط جریان ψ ثابت است. و همین طور از شکل (۲-۱۰) می توان دید که جریان عبوری از المان سطح در جهت Γ برابر است با:

$$\delta Q_r = V_r 2\pi r \sin \theta (r \delta \theta) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} 2\pi r \sin \theta (r \delta \theta)$$

$$\delta Q_r = 2\pi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \delta \theta \quad (۴-۱۰)$$

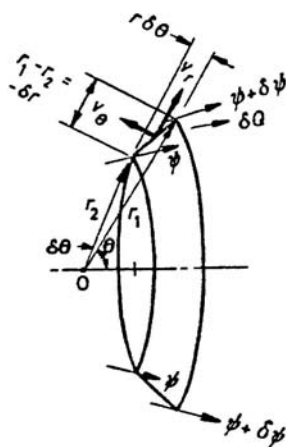
همچنین جریان در جهت θ برابر است با:

$$\delta Q_\theta = V_\theta 2\pi r \sin \theta (-\delta r) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} 2\pi r \sin \theta (-\delta r)$$

$$\delta Q_\theta = 2\pi \frac{\partial \psi}{\partial r} \delta r \quad (۵-۱۰)$$

پس:

$$dQ = 2\pi \left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \psi}{\partial r} dr \right] = 2\pi d\psi \quad (۶-۱۰)$$



شکل ۲-۱۰: رابطه خطوط پتانسیل و دبی در مختصات کروی جریان سه بعدی

اگر جریان غیر چرخشی باشد از شرایط غیر چرخشی در سیستم مختصات کروی داریم:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (V_\theta r) - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} = 0$$

با جایگذاری سرعتها از (۲-۱۰) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] = 0$$

در نتیجه:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (۷-۱۰)$$

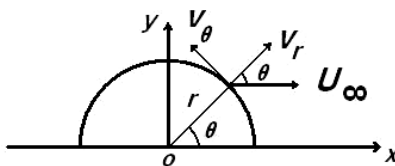
که هم ارز با معادله لاپلاس برای تابع جریان در مختصات قطبی برای جریان غیر چرخشی متقارن محوری است. از حل معادله فوق تابع جریان غیر چرخشی حاصل می شود. برای شرایط مرزی خاص در جریان پتانسیل با تقارن محوری می توان معادله فوق را حل کرد تا ψ را به دست آورد. چون تابع جریان و تابع پتانسیل در این حالت دو تابع متعامد نیستند از روش تبدیل کانفرمال و یا متغیرهای مختلط که برای توابع ψ و ϕ متعامد صادق است دیگر نمی توان استفاده کرد، ولی چون رابطه فوق، مانند معادله لاپلاس، روابط خطی بر حسب ψ و ϕ هستند، شرایط توأم کردن یا برهم نهش صادق است و می توان در این حالت از روش توأم کردن توابع جریان و پتانسیل استفاده کرد و بعضی از جریان های مورد نظر را به دست آورد.

۱۰-۲- به دست آوردن توابع جریان ساده

از این روابط برای دست آوردن ψ و ϕ برای حالت های جریان های پتانسیل ابتدایی با تقارن محوری استفاده می شود.

۱۰-۲-۱- جریان یکنواخت سه بعدی

جریان یکنواخت موازی در جهت x با سرعت ثابت U_∞ ، جریانی دارای مولفه های $V_r = U_\infty \cos \theta$ ، $V_\theta = -U_\infty \sin \theta$ می باشد.



شکل ۱۰-۳: مولفه های سرعت جریان

از روابط فوق داریم:

$$V_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_{\infty} \cos \theta \quad (۸-۱۰)$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_{\infty} r^2 \sin \theta \cos \theta$$

با انتگرالگیری نسبت به θ داریم:

$$\psi = \frac{1}{2} U_{\infty} r^2 \sin^2 \theta + f(r) \quad (۹-۱۰)$$

همچنین داریم:

$$V_{\theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_{\infty} \sin \theta$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = r U_{\infty} \sin^2 \theta$$

با انتگرالگیری نسبت به r خواهیم داشت:

$$\psi = \frac{1}{2} (U_{\infty} \sin^2 \theta) r^2 + g(\theta)$$

از مقایسه روابط فوق نتیجه می گیریم که توابع اختیاری $f(r)$ و $g(\theta)$ هر دو باید با یک مقدار ثابت برابر باشند.

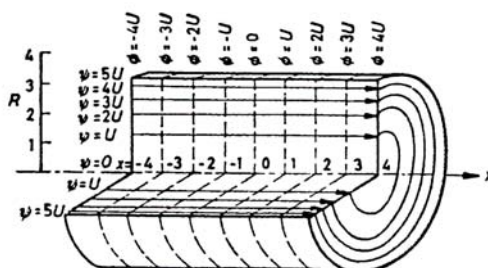
$$\psi = \frac{1}{2} U_{\infty} r^2 \sin^2 \theta + cte$$

که ثابت را معمولاً صفر در نظر می گیرند، که در آن صورت $\psi = 0$ خط $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ می باشد.

$$\psi = \frac{1}{2} U_{\infty} r^2 \sin^2 \theta \quad (۱۰-۱۰)$$

و همین طور $V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U_{\infty} \cos \theta$ ، $V_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U_{\infty} \sin \theta$ است، به روش مشابه خواهیم داشت:

$$\phi = U_{\infty} r \cos \theta \quad (۱۱-۱۰)$$



شکل ۱۰-۴: صفحات جریان و صفحات هم پتانسیل در جریان سه بعدی موازی با محور X

۱۰-۲-۲- چشمه و چاه نقطه ای سه بعدی

در نظر بگیرید که جریان حجمی Q از یک نقطه به صورت شعاعی به طور یکسان به اطراف پخش می شود. در شعاع r سرعت شعاعی جریان برابر است با Q تقسیم بر سطح کره به شعاع r یعنی $4\pi r^2$.

$$V_r = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{m}{r^2}, \quad V_\theta = 0$$

که در اینجا $m = \frac{Q}{4\pi}$ است. از رابطه سرعت با تابع جریان و تابع پتانسیل داریم:

$$V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

از $\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$ نتیجه می شود $\phi = f_1(r)$ و از $\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$ نتیجه می گردد $\psi = f_2(\theta)$. همچنین:

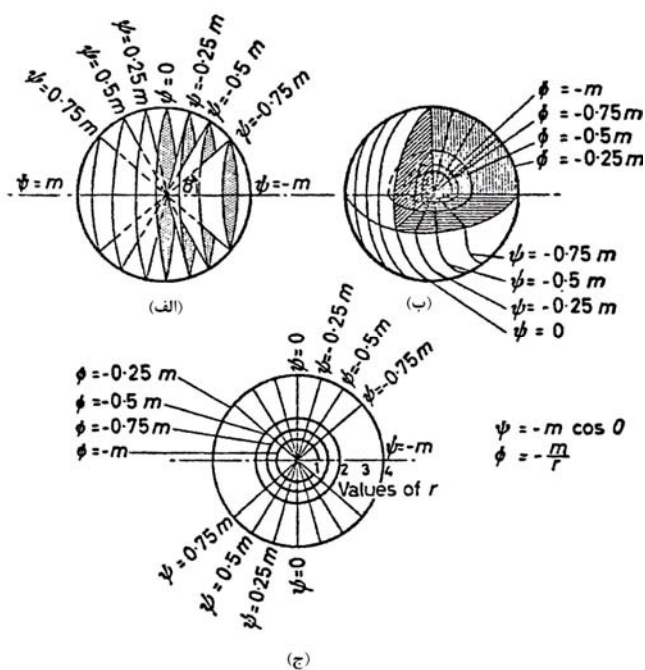
$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{m}{r^2}$$

بنابراین به ترتیب از $\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{m}{r^2}$ و $\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = m \sin \theta$ نتیجه می شود:

$$\phi = -\frac{m}{r} \quad (۱۰-۱۲)$$

$$\psi = -m \cos \theta \quad (۱۰-۱۳)$$

برای چاه سه بعدی m به $-m$ تبدیل می شود.



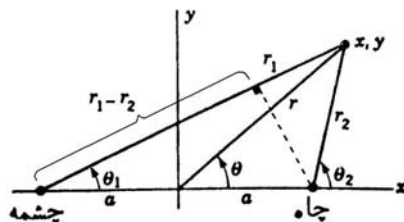
شکل ۱۰-۵: چشمه و چاه نقطه ای سه بعدی

(الف) صفحات جریان - (ب) صفحات هم پتانسیل - (ج) مقطعی از صفحات جریان و صفحات هم پتانسیل

۱۰-۲-۳- دوقطبی (دوبلت) سه بعدی (نقطه ای)

اگر یک چشمه نقطه ای در $(x, y) = (-a, 0)$ و چاه هم قدرت در نقطه $(+a, 0)$ قرار دهیم، وقتی در حد a بسیار کوچک شود ($a \rightarrow 0$) و همزمان قدرت به طور نامحدود افزایش یابد، حاصلضرب $2am$ به سمت مقدار ثابت λ میل می کند. مقدار ثابت λ به عنوان قدرت دوبلت شناخته می شود.

$$\varphi = \lim_{a \rightarrow 0} \left(-\frac{m}{r_1} + \frac{m}{r_2} \right) = \lim_{a \rightarrow 0} \left(m \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \right) \right) =$$



شکل ۱۰-۶: مختصات برای ایجاد دوبلت سه بعدی

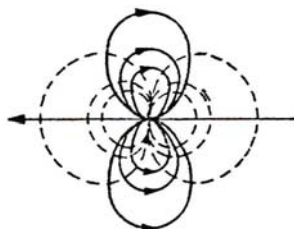
مطابق شکل (۱۰-۶) وقتی $a \rightarrow 0$ داریم $r_1 - r_2 \approx 2a \cos \theta_1$ همچنین $r_1 r_2 \rightarrow r^2$ و $\theta_1 \rightarrow \theta$ در نتیجه:

$$\varphi = \frac{\lambda \cos \theta}{r^2} \quad (۱۰-۱۴)$$

با توجه به اینکه $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$ خواهیم یافت:

$$\psi = -\frac{\lambda \sin^2 \theta}{r} \quad (۱۰-۱۵)$$

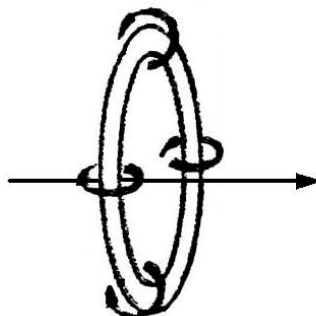
مطابق شکل (۱۰-۷) صفحات جریان و صفحات هم پتانسیل، به صورت دایره کامل نمی باشند و از این لحاظ با شکل دایره ای دوبلت دو بعدی تفاوت دارد. در اینجا و دو دسته خطوط همدیگر را با زاویه ۹۰ درجه قطع نمی کنند و متعامد نمی باشند.



شکل ۱۰-۷: دوبلت سه بعدی، مقطع صفحات جریان (با خطوط پیوسته) و صفحات هم پتانسیل (با خطوط شکسته) رسم شده اند

در پایان این بخش متذکر می شویم که ورتکس سه بعدی متقارن، شبیه آنچه در مورد ورتکس دو بعدی روی صفحه دیدیم وجود ندارد، ولی می توان ورتکس حلقوی متقارن محوری سه بعدی

مطابق شکل (۸-۱۰) داشت. مثال واقعی این حالت، ایجاد حلقه ای از دود هنگام خروج از یک سوراخ در هوا می باشد.



شکل ۸-۱۰: ایجاد حلقه دود در جریان خروجی از سوراخ

این مسئله مثال دیگری است از این اصل که ورتکس ایجاد شده در سیال، نمی تواند در یک نقطه تمام شود یا باید به جدار متصل شود و یا یک حلقه بسته را ایجاد کند. آزمایش ها نشان داده اند که حرکت غیر چرخشی حلقه دود به شکل متقارن محوری در هر لحظه بوده و سیال خروجی از سوراخ در حالی که به شکل لوله حلقوی محصور است به حرکتش ادامه می دهد.

۱۰-۳- توأم کردن جریان های متقارن محوری

اکنون در مرحله ای هستیم که می توانیم مطالعات خود در مورد روش توأم کردن جریانهای سه بعدی با تقارن محوری را برای مسائل پیچیده تر آغاز کنیم.

۱۰-۳-۱- ترکیب جریان یکنواخت و چشمه نقطه ای (سه بعدی)

با توأم کردن توابع جریان و توابع پتانسیل چشمه و جریان حول نیم بدنه متقارن محوری ایجاد می شود:

$$\psi = \frac{1}{2} U_{\infty} r^2 \sin^2 \theta - m \cos \theta \quad (۱۰-۱۶)$$

$$\phi = U_{\infty} r \cos \theta - \frac{m}{r} \quad (۱۰-۱۷)$$

و با مشتق گیری از تابع جریان بیان شده با رابطه (۱۰-۱۶) خواهیم داشت:

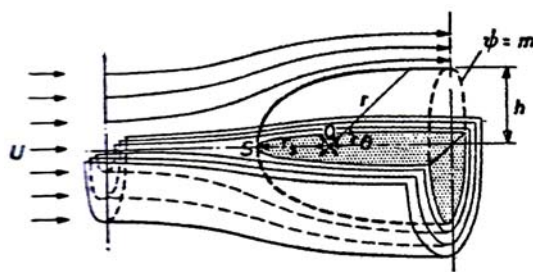
$$V_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} (U_{\infty} r^2 \sin \theta \cos \theta + m \sin \theta) = U_{\infty} \cos \theta + \frac{m}{r^2} \quad (۱۰-۱۸)$$

$$V_{\theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{r \sin \theta} (U_{\infty} r \sin^2 \theta) = -U_{\infty} \sin \theta \quad (۱۰-۱۹)$$

در نقطه سکون $V_\theta = 0$ است، در نتیجه $\theta = 180^\circ$ و همچنین از $V_r = 0$ نتیجه می شود:

$$-U_\infty + \frac{m}{r^2} = 0$$

لذا $r_s = \left(\frac{m}{U_\infty}\right)^{\frac{1}{2}}$ و خط جریانی که از نقطه سکون می گذرد و نیم بدنه را تشکیل می دهد به شرح زیر مشخص می شود.



شکل ۱۰-۹: ترکیب جریان یکنواخت و یک چشمه نقطه ای

با جایگذاری $\theta = \pi$ و $r_s = \left(\frac{m}{U_\infty}\right)^{\frac{1}{2}}$ در (۱۰-۱۶) خواهیم داشت $\psi = m$ بنابراین اگر در نقطه سکون $(r, \theta) = (a, \pi)$ که خطوط جریان نیم بدنه از آن می گذرد $m = U_\infty a^2$ را در تابع جریان قرار دهیم مقدار تابع جریان نیم بدنه $\psi = U_\infty a^2$ می شود. با تقسیم طرفین رابطه (۱۰-۱۶) بر $m = U_\infty a^2$ خواهیم داشت:

$$\frac{\psi}{U_\infty a^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2 \theta - \cos \theta \quad (۱۰-۲۰)$$

برای خط جریانی که از نقطه S عبور می کند $\psi = m = U_\infty a^2$ است. پس معادله تابع جریان نیم بدنه (شکل نیم بدنه) عبارت است از:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2 \theta - \cos \theta = 1 \quad (۱۰-۲۱)$$

این معادله، شکل نیم بدنه متقارن محوری را ایجاد می کند که چشمه را در داخل دارد. این نیم بدنه را می توان مشابه یک لوله پیتوت در نظر گرفت. در فاصله دور $r \rightarrow \infty$ نیم بدنه قطر $2h = 4a$ را خواهد داشت. می توان نوشت:

$$V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = U_\infty^2 + \frac{m^2}{r^4} + 2 \frac{m}{r^2} \cos \theta$$

و از رابطه برنولی توزیع فشار به صورت زیر حاصل می شود:

$$\frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - \left(\frac{V}{U_{\infty}} \right)^2 = -\frac{m^2}{r^4 U_{\infty}^2} - 2 \frac{m}{r^2 U_{\infty}} \cos \theta \quad (10-22)$$

سرعت ماکزیمم و فشار مینیمم روی جسم در $\theta = 70.5^\circ$, $r = a\sqrt{3}$ خواهد بود که مقدار سرعت ماکزیمم $V_{\max} = 1.155 U_{\infty}$ می شود. از این نقطه به بعد سرعت روی بدنه به طور آهسته، کاسته می شود تا در بی نهایت به U_{∞} می رسد. کاهش سرعت و افزایش فشار بسیار کم و تدریجی است و در این حالت $\frac{dp}{dx} \approx 0$ است و می توان دید که طبق تئوری لایه مرزی جدائی نخواهیم داشت. بنابراین این جریان غیر چرخشی، تقریباً مشابه جریان حقیقی حول یک جسم نیم بدنه سه بعدی متقارن محوری می باشد. ولی اگر جریان یکنواخت را با چاه توأم کنیم شکل نیم بدنه ای ایجاد می شود که در پشت سطح افزایش فشار نسبتاً زیادی دارد و باعث ایجاد جدائی می شود، بنابراین شکل این حالت، شبیه حالت واقعی خواهد بود.

۱۰-۳-۲- ترکیب جریان یکنواخت و جریان دوبلت

مجموع یک جریان موازی و یک دوقطبی (دوبلت) در مبدا مختصات تابع جریان زیر را تولید می کند:

$$\psi = \frac{1}{2} U_{\infty} r^2 \sin^2 \theta - \frac{\lambda}{r} \sin^2 \theta \quad (10-23)$$

چنانکه بعداً خواهیم دید این ترکیب معادل با جریان حول کره وقتی ناظر با کره حرکت می کند خواهد بود.

۱۰-۳-۲-۱- جریان حول کره وقتی ناظر با کره حرکت دارد

مجموع دوبلت و جریان یکنواخت سه بعدی این جریان را تولید می کند. توابع ψ, ϕ برای ترکیب دوبلت واقع شده در مبدا مختصات و جریان یکنواخت با سرعت U و موازی محور x عبارتند از :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{\lambda \cos \theta}{r^2} + U r \cos \theta \quad (10-24)$$

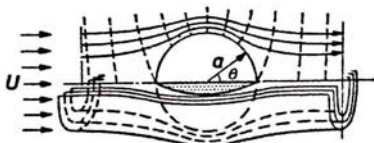
$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{\lambda \sin^2 \theta}{r} + \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta = \sin^2 \theta \left[-\frac{\lambda}{r} + \frac{U}{2} r^2 \right] \quad (10-25)$$

هنگامی تابع جریان $\psi = 0$ است که $\sin \theta = 0$ در نتیجه $\theta = 0$, π باشد و یا

$$\frac{\lambda}{r} - \frac{U}{2} r^2 = 0 \quad (10-26)$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{2\lambda}{U}}$$

سطح $\psi = 0$ را می توان جدار جامد در نظر گرفت، که کره ای به شعاع $a = \sqrt[3]{\frac{2\lambda}{U}}$ می باشد. خطوط جریان دیگر معادل با جریان اطراف کره است.



شکل ۱۰-۱: جریان اطراف کره که ناظر با کره حرکت می کند

برای بدست آوردن توزیع سرعت و فشار روی کره چنین عمل می کنیم.

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \left(-\frac{2\lambda}{r^3} + U\right) \cos \theta \quad (۲۷-۱۰)$$

$$V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \left(-\frac{\lambda}{r^3} - U\right) \sin \theta \quad (۲۸-۱۰)$$

روی سطح جریان $\psi = 0$ یعنی روی جداره کره $V_r = 0$ است و $\lambda = \frac{Ua^3}{2}$ می باشد. روی جدار $r = a$ بوده بنابراین سرعت روی جدار:

$$V = V_\theta|_{r=a} = \left(-\frac{Ua^3}{2r^3} - U\right) \sin \theta = -\frac{3}{2}U \sin \theta \quad (۲۹-۱۰)$$

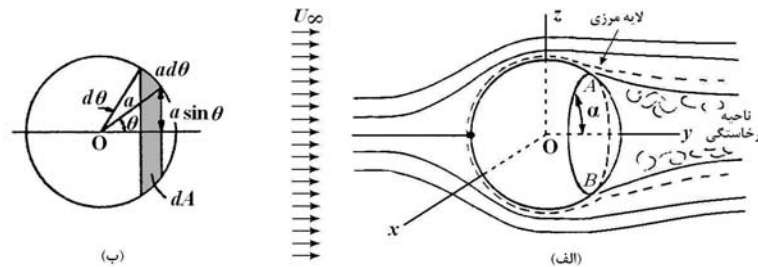
که V_θ در جهت خلاف عقربه ساعت مثبت است. در نقطه سکون $V_\theta = 0$ پس $\theta = 0, \pi$ و $r = a$ می باشد. سرعت ماکزیمم روی $r = a$ در نقطه ای است که $\theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{3\pi}{2}$ می باشد و مقدار سرعت ماکزیمم $V_{\max} = \frac{3}{2}U$ خواهد بود و توزیع فشار روی سطح از رابطه برنولی، قابل محاسبه است.

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \quad (۳۰-۱۰)$$

از معادلات فوق که سرعت روی جدار کره را $V_\theta|_{r=a} = -\frac{3}{2}U \sin \theta$ نشان می دهد می توان دید که از $\theta = \frac{\pi}{2}$ تا $\theta = \pi$ دیگر سرعت، افزایش نیافته رو به کاهش می گذارد و در نتیجه افزایش فشار داریم. اگر معادلات لایه مرزی آرام (لایه ای) با گرادیان فشار این حالت به کار برده شود می توان نقطه جدائی را به دست آورد که در $\theta = 76^\circ$ خواهد بود، البته در صورتی که افزایش فشار دقیقاً از رابطه برنولی بر اساس تغییرات $V = -\frac{3}{2}U \sin \theta$ تبعیت کند و جریان در قشر مرزی بصورت لایه ای باشد این زاویه درست خواهد بود. پس از جدائی حتی در قشر مرزی لایه ای، شکل خطوط جریان تغییر کرده و بر سطح جریان قبل از کره اثر می گذارد و تغییر سرعت، دیگر از رابطه فوق

تبعیت نمی کند. در عمل، برخاستگی پهن تری پشت کره خواهیم داشت. سرعت ماکزیمم حدود $1.3U$ و در زاویه $\theta = 107^\circ$ خواهد بود و جدائی نیز در حدود $\theta = 98^\circ$ خواهد بود. وقتی قشر مرزی مغشوش شود جدائی به تعویق می افتد در حدود $\theta = 70^\circ$ رخ می دهد و ضریب C_D از حدود 0.8 به حدود 0.4 در قشر مرزی مغشوش کاهش می یابد.

مثال ۱۰-۱) شکل زیر کره ای به شعاع a در جریان با سرعت یکنواخت U_∞ دور از کره را نشان می دهد، اگر برخاستگی روی خط محیطی AB در زاویه α رخ دهد، با فرض اینکه تا قبل از جدایش، جریان پتانسیل معتبر باشد و بازیافت فشار در ناحیه برخاستگی، ناچیز باشد ضریب دراگ فشاری روی کره را برای حالات ذکر شده فوق محاسبه کنید.



شکل ۱۰-۱۱: الف- ناحیه برخاستگی در جریان اطراف کره ب- المان انتگرالگیری روی سطح کره

حل -

از رابطه (۱۰-۳۰) داریم $\frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \frac{9}{4}\sin^2 \theta$ پس فشار نسبی برابر است با:

$$P = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \left(1 - \frac{9}{4}\sin^2 \theta\right)$$

پسای فشاری در ناحیه بالادست کره برابر است با:

$$D_1 = \iint P \cos \theta dA = \int_{\pi}^{\alpha} P \cos \theta (2\pi a \sin \theta) (a d\theta) = \rho U_\infty^2 \pi a^2 \int_{\pi}^{\alpha} \left(1 - \frac{9}{4}\sin^2 \theta\right) \cos \theta (\sin \theta) (d\theta)$$

$$D_1 = \rho U_\infty^2 \pi a^2 \left(\int_{\pi}^{\alpha} (\sin \theta \cos \theta - \frac{9}{4}\sin^3 \theta \cos \theta) d\theta \right) = \rho U_\infty^2 \pi a^2 \left(\frac{1}{2}\sin^2 \theta - \frac{9}{16}\sin^4 \theta \right)_{\pi}^{\alpha}$$

$$D_1 = \rho U_\infty^2 \pi a^2 \left(\frac{1}{2}\sin^2 \alpha - \frac{9}{16}\sin^4 \alpha \right)$$

حال منطقه برخاستگی را در نظر می گیریم. با فرض اینکه در این ناحیه فشار روی سطح کره با فشار نقطه جدایش برابر است خواهیم داشت:

$$D_2 = P_{\theta=\alpha} [\pi(a \sin \alpha)^2] = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (1 - \frac{9}{4} \sin^2 \alpha) [\pi(a \sin \alpha)^2] = \rho U_\infty^2 \pi a^2 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \frac{9}{8} \sin^4 \alpha \right)$$

پسای برآیند روی کره برابر خواهد بود با:

$$D = D_1 - D_2 = \frac{9}{16} \rho U_\infty^2 \pi a^2 (\sin^4 \alpha)$$

در نتیجه ضریب پسا به صورت زیر است:

$$C_D = \frac{D}{1/2 \rho U_\infty^2 (\pi a^2)} = \frac{9}{8} \sin^4 \alpha$$

ضریب دراگ فشاری روی کره را برای حالات ذکر شده برابر است با:

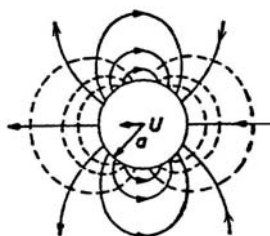
$$\alpha = 98^\circ \rightarrow C_D = \frac{9}{8} (0.99)^4 = 1.08$$

$$\alpha = 70^\circ \rightarrow C_D = \frac{9}{8} (0.94)^4 = 0.88$$

دلیل اصلی تفاوت بین ضریب پسای تئوری و تجربی در جریان اطراف کره این است که ضخامت جابجایی در محاسبه تئوری لحاظ نشده است. اگر ضخامت جابجایی تا محل برخاستگی به دیواره کره اضافه شود نتایج، بهترین تطبیق را با هم خواهند داشت.

۱۰-۳-۲-۲ جریان اطراف کره متحرک نسبت به ناظر ثابت

در الگوی گذشته ناظر و کره نسبت به یکدیگر ثابت بودند و سیال حرکت می کرد. در حالت الگوی غیر دائمی، ناظر ثابت، کره متحرکی را مشاهده می کند که با سرعت ثابت در سیال ساکنی حرکت می کند. در جریان اطراف کره متحرک، ناظر ثابت، مشاهده می کند که سیال به حرکت در می آید و جریان اطراف کره، مشابه جریان قسمتی از دوقطبی سه بعدی می باشد که روی سطح $\psi = 0$ یعنی روی جداره کره $\lambda = \frac{Ua^3}{2}$ است. در حالتی که کره شروع به حرکت می کند جریان اطراف نسبت به کره (از دید ناظر ساکن) مثل جریان دوبلت شکل (۱۰-۷) می باشد. U سرعت حرکت کره در سیال است.



شکل ۱۰-۱۲: سطوح جریان و سطوح هم پتانسیل برای حرکت کره در سیال

بنابراین تابع جریان و پتانسیل آن به ترتیب بصورت زیر می باشند:

$$\psi = -\frac{\lambda \sin^2 \theta}{r} = -\frac{Ua^3 \sin^2 \theta}{2r} \quad (۳۱-۱۰)$$

$$\varphi = \frac{\lambda \cos \theta}{r^2} = \frac{Ua^3 \cos \theta}{2r^2} \quad (۳۲-۱۰)$$

سرعت سیال در هر نقطه ای به فاصله r از مرکز کره در هر لحظه برابر با $|V| = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}$ است که:

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{Ua^3}{r^3} \cos \theta \quad (۳۳-۱۰)$$

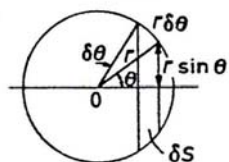
$$V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{Ua^3}{2r^3} \sin \theta \quad (۳۴-۱۰)$$

بنابراین:

$$V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 = (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \left(\frac{Ua^3}{2r^3} \right)^2 = (3 \cos^2 \theta + 1) \left(\frac{Ua^3}{2r^3} \right)^2 \quad (۳۵-۱۰)$$

وقتی کره از حالت سکون در سیال حرکت می کند و به سرعت ثابت می رسد، نیرویی لازم است که به جسم و سیال اطراف شتاب دهد، و آن را به حالت نهایی برساند. برای هر المان از سیال با جرم dM و سرعت V ، مقدار انرژی جنبشی $\frac{1}{2} dM V^2$ می باشد و در هر لحظه انرژی جنبشی سیال اطراف کره برابر است با:

$$T_f = \int \frac{1}{2} V^2 dM \quad (۳۶-۱۰)$$



شکل ۱۰-۱۳: المان سطح ds روی کره به شعاع r

با توجه به شکل در مختصات قطبی $ds = 2\pi(r \sin \theta)(r d\theta)$ می باشد، پس

$$dM = \rho dV = \rho \cdot ds \cdot dr = \rho(2\pi r \sin \theta) r d\theta dr \quad (۳۷-۱۰)$$

انرژی جنبشی سیال اطراف کره برابر است با:

$$T_f = \frac{1}{2} \int V^2 dM = \frac{1}{2} \int_a^\infty \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta + 1) \left(\frac{Ua^3}{2r^3} \right)^2 \rho(2\pi r \sin \theta) r d\theta dr$$

با ساده سازی:

$$T_f = \frac{\rho \pi U^2 a^6}{2} \int_a^\infty \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta + 1) \sin \theta d\theta \frac{1}{r^4} dr = \frac{\rho \pi U^2 a^6}{2} (-\cos^3 \theta - \cos \theta) \Big|_0^\pi \left(\frac{-1}{3r^3} \right) \Big|_a^\infty$$

در نتیجه:

$$T_f = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{2\pi a^3}{3} \right) U^2 = \frac{1}{2} M' U^2 \quad (۳۸-۱۰)$$

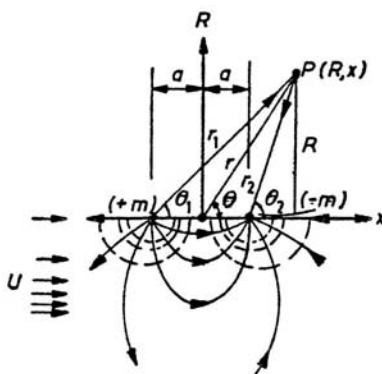
که M' نصف جرم سیال جابجا شده بوسیله کره است یعنی $M' = \frac{1}{2} \rho_f \frac{4\pi a^3}{3}$. انرژی جنبشی کل برابر است با انرژی جنبشی سیال و کره، که به صورت زیر می باشد.

$$T_{f+s} = \frac{1}{2} [M' + M] U^2 \quad (۳۹-۱۰)$$

برای شتاب دادن یا کند کردن کره، نیرویی لازم است که هم به سیال و هم به کره شتاب بدهد. نیروی اضافی لازم برای شتاب دادن به سیال برابر $F' = M' \frac{du}{dt}$ است. نیروی کل برای شتاب، برابر است با $F = (M + M') \frac{du}{dt}$ که $(M + M')$ را جرم موثر می نامند. M' نصف جرم سیال هم حجم کره M و جرم کره است. بدین ترتیب اثر وجود سیال، افزایش آشکار جرم مجازی M' به جرم خود کره یعنی M است.

۱۰-۳-۳- ترکیب جریان یکنواخت و چشمه و چاه

ترکیب جریان یکنواخت U در جهت محور x ها و یک چشمه نقطه ای در $x = -a$ و چاه نقطه ای در $x = a$ جریان حول جسم بیضوی (تخم مرغی) را ایجاد می کند که به بدنه رانکین^۱ معروف است. معادلات تابع پتانسیل به صورت زیر خواهند بود:



شکل ۱۰-۱۴: ترکیب جریان یکنواخت و چشمه و چاه

$$\varphi = Ux \cos \theta - \frac{m}{r_1} + \frac{m}{r_2} \quad (۴۰-۱۰)$$

$$\varphi = Ux - m \left(\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + R^2}} \right) \quad (۴۱-۱۰)$$

^۱ Rankine body

معادلات تابع جریان نیز عبارتند از:

$$\psi = \frac{1}{2}Ur^2 \sin^2 \theta - m(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (۴۲-۱۰)$$

$$\psi = \frac{1}{2}UR^2 - m(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (۴۳-۱۰)$$

با توجه به شکل (۱۰-۱۴) روی محور x ها $R=0$ است و از معادله (۱۰-۴۱) داریم:

$$\varphi_x = Ux - \frac{m}{x+a} + \frac{m}{x-a}$$

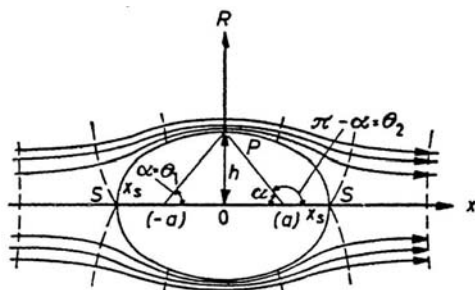
در نتیجه نقاط سکون را می توان با برابر صفر قرار دادن سرعت در امتداد محور x بدست آورد:

$$V_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = U + \frac{m}{(x+a)^2} - \frac{m}{(x-a)^2} = 0$$

در نتیجه در نقاط سکون:

$$\frac{U}{m} - \frac{4ax_s}{(x_s^2 - a^2)^2} = 0 \quad (۴۴-۱۰)$$

با حل این معادله نقاط سکون مشخص می شوند.



شکل ۱۰-۱۵: جریان اطراف یک بیضوی (تخم مرغی)

به ازای $\psi = 0$ معادله جدار جسم بدست می آید. از رابطه (۱۰-۴۳) خواهیم یافت:

$$\frac{2m}{U}(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) - R^2 = 0 \quad (۴۵-۱۰)$$

که در آن $R^2 = r^2 \sin^2 \theta$ است که به ازای $\theta = \frac{\pi}{2}$ در شکل (۱۰-۱۵) برابر با نصف ماکزیمم عرض

جسم یعنی op است. مطابق شکل $\theta_1 = \alpha$, $\theta_2 = \pi - \alpha$ و نیز $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}$ بنابراین از

رابطه (۱۰-۴۴) خواهیم داشت:

$$R_{\max}^2 = h^2 = \frac{2m}{U}[\cos \alpha - \cos(\pi - \alpha)] = \frac{4m}{U} \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \quad (۴۶-۱۰)$$

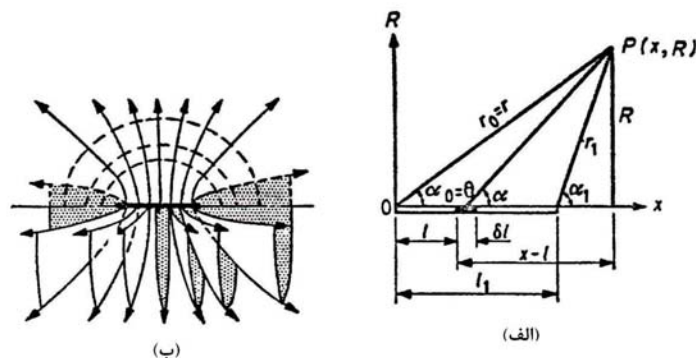
که با حذف $\frac{m}{U}$ به کمک رابطه (۱۰-۴۴) داریم:

$$h^2 \sqrt{a^2 + h^2} = \frac{(x_s^2 - a^2)^2}{x_s} \quad (۱۰-۴۷)$$

بدین ترتیب برای بدنه رانکین با ابعاد دلخواه (x_s, h) می توان به وسیله رابطه فوق، موقعیت چاه و چشمه $(a, \pm 0)$ را تعیین نمود.

۱۰-۳-۴- ترکیب بینهایت چشمه (چاه) نقطه ای - خط چشمه (چاه) سه بعدی

خط چشمه سه بعدی پاره خطی است که در امتداد آن بی نهایت چشمه نقطه ای سه بعدی به صورت یکنواخت توزیع شده است. قدرت خط چشمه، مقدار جریانی است که در واحد طول خط چشمه خارج می شود. مطابق شکل (۱۰-۱۶ الف) یک خط چشمه از مبدأ تا فاصله l_1 در امتداد محور X نشان داده شده است و نقاط چشمه در امتداد X توزیع شده اند.



شکل ۱۰-۱۶: الف- تعریف خط چشمه سه بعدی ب- صفحات و خطوط جریان و خطوط هم پتانسیل

مقدار ψ در هر نقطه مثل $P(x, R)$ در اثر یک المان طول δl که آن را می توان یک چشمه نقطه ای در نظر گرفت، قدرتی معادل $q\delta l$ دارد:

$$\delta\psi = -\frac{q\delta l}{4\pi} \cos\alpha = -m'\delta l \cos\alpha \quad (۱۰-۴۸)$$

که $m' = \frac{q}{4\pi}$ و α زاویه بین محور X و خط واصل بین المان و نقطه P می باشد. واضح است که ψ مجموع تمام $\delta\psi$ ها در طول خط l_1 خواهد بود، به عبارت دیگر:

$$\psi = \int_0^{l_1} d\psi = -\int_0^{l_1} m' \cos\alpha dl \quad (۱۰-۴۹)$$

و چون:

$$x-l = R \cot\alpha = R \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (۱۰-۵۰)$$

با دیفرانسیل گیری از طرفین این رابطه داریم:

$$-dl = R \frac{-\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

در نتیجه:

$$dl = \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha \quad (۱۰-۵۱)$$

بنابراین:

$$\psi = -\int_0^l m' R \frac{(\cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} d\alpha = -\left[m' R \frac{1}{\sin \alpha} \right]_{\alpha_0}^{\alpha_1} \quad (۱۰-۵۲)$$

شکل خطوط و صفحات جریان مطابق شکل (۱۰-۱۶ب)، سهمی هایی متقارن با نقاط کانونی واقع در دو انتهای خط چشمه است. یک خط چاه، منفی یک خط چشمه خواهد بود.

$$\psi = -m' R \left[\frac{1}{\sin \alpha_0} - \frac{1}{\sin \alpha_1} \right] = -m'(r_0 - r_1) = -m'(r - r_1) \quad (۱۰-۵۳)$$

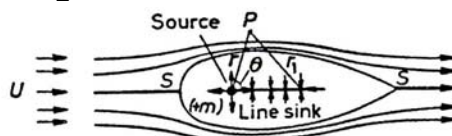
۱۰-۳-۵- ترکیب چشمه نقطه ای، خط چاه سه بعدی و جریان موازی

پیشتر دیدیم که در حالت ترکیب جریان موازی سه بعدی و نقطه چاه، جریان اطراف نیم بدنه که یک طرفش تا بینهایت ادامه دارد ایجاد می شود. ولی در این حالت، چون دبی چشمه نقطه ای $Q = 4\pi m$ و دبی چاه $Q' = ql = 4\pi m'l$ است، وقتی مقدار دبی خروجی از چشمه با دبی ورودی به خط چاه برابر باشد (Q با Q' برابر باشد) جریان حول یک جسم بسته متقارن دوکی شکل ایجاد می شود، مثل بدنه زیر دریایی یا بالون یا بدنه اصلی هواپیمای مادون صوت یا شکل بدن پرندگانی چون کبوتر.

جریان موازی ψ + خط چاه ψ + نقطه چشمه ψ = کل ψ

تابع جریان این ترکیب به شکل زیر خواهد بود:

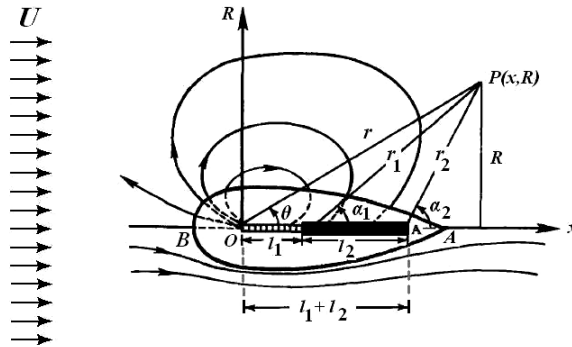
$$\psi = -mr \cos \theta + m'(r - r_1) + \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta \quad (۱۰-۵۴)$$



شکل ۱۰-۱۷: جریان اطراف یک جسم سه بعدی دوکی شکل

با ترکیب تعدادی چشمه های خطی و چاه های خطی کوتاه با جریان یکنواخت می توان جریان تقریبی حول هر جسم مدور را به دست آورد، سپس می توان با استفاده از رابطه برنولی برای شکلهای مختلف، توزیع سرعت و فشار روی آنها را به دست آورد.

- مثال ۱۰-۲) با ترکیب جریان یکنواختی به سرعت $U = 10 \frac{m}{s}$ یک چشمه خطی به طول $l_1 = 0.2m$ با قدرت $m_1 = \frac{1}{4\pi} (\frac{m^3}{s})$ و یک چاه خطی به طول $l_2 = 0.4m$ و با قدرت $m_2 = \frac{0.5}{4\pi} (\frac{m^3}{s})$ جریان حول بدنه مدوری مانند شکل زیر حاصل شده است.
- الف- طول جسم مدور را تعیین کنید.
- ب- شعاع این جسم در $\theta = 45^\circ$ را محاسبه کنید.



شکل ۱۰-۱۸: جریان اطراف بدنه مدور مثال ۱۰-۲

حل - تابع جریان این ترکیب عبارت است از:

$$\psi = \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta - m_1 (r - r_1) + m_2 (r_1 - r_2)$$

یا:

$$\psi = \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta - m_1 r + (m_1 + m_2) r_1 - m_2 r_2$$

از هندسه شکل داریم:

$$r_1 = \left[(r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta - l_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[r^2 - 2r l_1 \cos \theta + l_1^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_2 = \left[(r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta - (l_1 + l_2))^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[r^2 - 2r (l_1 + l_2) \cos \theta + (l_1 + l_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

با جایگذاری در تابع جریان:

$$\psi = \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta - m_1 r + (m_1 + m_2) \left[r^2 - 2r l_1 \cos \theta + l_1^2 \right]^{\frac{1}{2}} - m_2 \left[r^2 - 2r (l_1 + l_2) \cos \theta + (l_1 + l_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

روی بدنه $V_r = 0$ است. بنابراین:

$$V_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$

$$V_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[U r^2 \sin \theta \cos \theta + (m_1 + m_2) \frac{2 r l_1 \sin \theta}{2 \sqrt{r^2 - 2 r l_1 \cos \theta + l_1^2}} - m_2 \frac{2 r (l_1 + l_2) \sin \theta}{2 \sqrt{r^2 - 2 r (l_1 + l_2) \cos \theta + (l_1 + l_2)^2}} \right] = 0$$

با ساده سازی داریم:

$$U \cos \theta + (m_1 + m_2) \frac{l_1}{r \sqrt{r^2 - 2 r l_1 \cos \theta + l_1^2}} - m_2 \frac{(l_1 + l_2)}{r \sqrt{r^2 - 2 r (l_1 + l_2) \cos \theta + (l_1 + l_2)^2}} = 0$$

در دو انتهای جسم، به ترتیب در نقاط B , A داریم:

$$\theta = 0 \rightarrow U + (m_1 + m_2) \frac{l_1}{r_A (r_A - l_1)} - m_2 \frac{(l_1 + l_2)}{r_A (r_A - l_1 - l_2)} = 0$$

$$\theta = \pi \rightarrow -U + (m_1 + m_2) \frac{l_1}{r_B (r_B + l_1)} - m_2 \frac{(l_1 + l_2)}{r_B (r_B + l_1 + l_2)} = 0$$

با محاسبه خواهیم داشت:

$$10 r_A + \left(\frac{1.5}{4\pi} \right) \frac{0.2}{(r_A - 0.2)} - \left(\frac{0.5}{4\pi} \right) \frac{(0.2 + 0.4)}{(r_A - 0.6)} = 0 \quad \rightarrow \quad r_A = 0.6039m$$

$$-10 r_B + \left(\frac{1.5}{4\pi} \right) \frac{0.2}{(r_B + 0.2)} - \left(\frac{0.5}{4\pi} \right) \frac{(0.2 + 0.4)}{(r_B + 0.6)} = 0 \quad \rightarrow \quad r_B = 0.00757m$$

در نتیجه طول جسم برابر است با:

$$r_A + r_B = 0.6115m$$

در حالت $\psi = 0$ و $\theta = 45^\circ$ خواهیم داشت:

$$0 = \frac{1}{2} (10) r^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \frac{1}{4\pi} r + \left(\frac{1.5}{4\pi} \right) \left[r^2 - 2(0.2) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) r + (0.2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{0.5}{4\pi} \right) \left[r^2 - 2(0.6) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) r + (0.6)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

با حل به روش سعی و خطا $r = 0.0510m$ حاصل می شود، بنابراین شعاع این جسم در $\theta = 45^\circ$

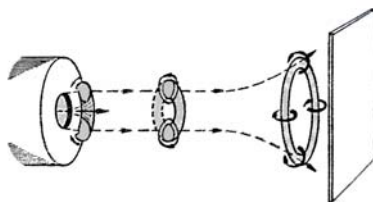
برابر $r \sin 45^\circ = 0.0361m$ خواهد بود.

تمرین های فصل دهم

۱-۱۰- مطابق شکل، حلقه دود خروجی از یک سوراخ به صورت متقارن محوری به یک

دیواره تخت نزدیک می شود، با توجه به مبحث روش تصویر آینه ای، دلیل افزایش

تدریجی قطر حلقه و کاهش ضخامت و سرعت آنرا شرح دهید.



شکل ۱۰-۱۹: مربوط به تمرین (۱-۱۰)

۲-۱۰- اگر یک جریان یکنواخت را با جریان چاه سه بعدی ترکیب کنیم شکل نیم بدنه ای

ایجاد می شود که در پشت سطح آن، افزایش فشار نسبتاً زیاد خواهد بود. با نوشتن

روابط لازم معادله سطح جسم و توزیع فشار را به دست آورید و توضیح دهید که

چرا این حالت، شبیه حالت واقعی نیست؟

۳-۱۰- نشان دهید نیروی پسا روی یک کره در جریان ایده آل بدون برخاستگی برابر صفر

خواهد بود.

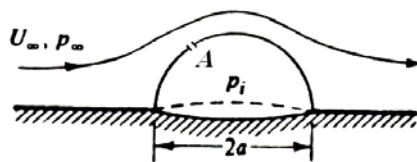
۴-۱۰- یک نیمکره به قطر $2a$ مطابق شکل زیر روی یک سطح افقی قرار گرفته است و

جریان هوا از چپ به راست می گذرد. فرض می کنیم جریان سیال را می توان

معادل جریان سیال ایده آل (غیر چرخشی) فرض کرد. اگر در نقطه A بخواهیم

سوراخی ایجاد کنیم تا فشار P_i داخل نیمکره برابر فشار خارج در آن نقطه باشد

محل این سوراخ کجا باید باشد تا بر اساس تئوری بدون لزجت، برآیند نیروی وارد بر نیمکره صفر شود؟



شکل ۱۰-۲۰: مربوط به تمرین (۱۰-۴)

۱۰-۵- توضیح دهید که چرا جریان در اطراف یک جسم متقارن محوری دوکی شکل دارای تابع جریان و تابع پتانسیل است و چگونه می توان آنها را به دست آورد؟ آیا این توابع متعامد هستند؟ در حالتی که سیال را غیر لزج فرض کنیم شکل چند خط جریان اطراف جسم و توزیع فشار روی جسم را رسم کنید و نقطه یا نقاط سکون را مشخص نمایید.

۱۰-۶- یک جسم متقارن محوری دوکی شکل به طول $3m$ و قطر حداکثر $0.75m$ مطابق

شکل با سرعت $10 \frac{m}{s}$ در آب یا هوا حرکت می کند. شکل تقریبی مرز لایه مرزی را به صورت نقطه چین رسم کنید و نواحی مختلف جریان را نشان دهید. برای دو حالت آب و هوا نیروی پسا را محاسبه کنید و با نیروی پسای کره ای به قطر $0.75m$ مقایسه کنید.



شکل ۱۰-۲۱: جسم دوکی شکل مربوط به تمرین (۱۰-۶)

۱۰-۷- الف- در جریان اطراف جسم دوکی شکل مطرح شده در تمرین قبل و کره مذکور، در چه حالتی ممکن است کاویتاسیون رخ دهد، برای کدام جریان و در چه نقطه ای

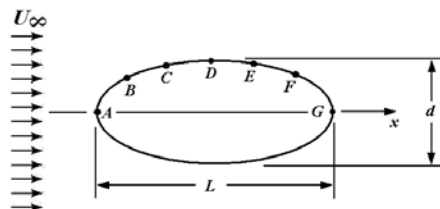
خواهد بود؟ ب- در صورتی که سطح هر دو جسم را زیر کنیم، نیروی پسا در

هریک از جریانهای هوا و آب چگونه تغییر خواهد کرد و چرا؟

۸-۱۰- یک جسم سه بعدی تخم مرغی شکل به طول L و قطر (ضخامت) ماکزیمم d که

مطابق شکل نسبت به محور x ها متقارن است در نظر بگیرید. این جسم با سرعت

ثابت U در سیال ساکن از راست به چپ حرکت می کند. با فرض سیال ایده آل:



شکل ۱۰-۲۱: جسم سه بعدی مربوط به تمرین (۸-۱۰) و (۹-۱۰)

الف- تابع جریان اطراف این جسم از ترکیب چه جریانهایی حاصل می شود؟

ب- نقطه یا نقاط سکون جریان، محل سرعت ماکزیمم و فشار مینیمم را مشخص کنید و

توزیع سرعت روی جدار را رسم کنید.

ج- سه خط جریان با $\delta\psi$ یکسان و سه خط پتانسیل، با تقریب خوب در یک طرف جسم

رسم کنید.

۹-۱۰- فرض کنید جسم متحرک مطرح شده در تمرین قبل، یک بالن در هوا یا یک زیر

دریایی در آب باشد که با سرعت کمتر از 0.2 سرعت صوت در سیال، در حرکت

باشد به طوریکه رینولدز جریان، اندازه گیری شده بر اساس طول از نقطه A و در

امتداد جدار جسم در نقطه D حدود 10^6 باشد.

الف- تغییرات تقریبی ضخامت لایه مرزی را یک طرف جسم مشخص کنید و شکل تقریبی

توزیع سرعت را در نقاط F, E, D, C, B در هر دو نوع سیال رسم کنید.

ب- آیا می توان در این جریانها از تغییرات جرم مخصوص صرف نظر کرد و جریان را غیر قابل تراکم فرض کرد؟ دلایل خود را توضیح دهید.

ج- در هر دو جریان، نقطه یا نقاط ماکزیمم سرعت و مینیمم فشار و همچنین نقطه یا نقاط مینیمم سرعت و ماکزیمم فشار را مشخص کنید و توزیع فشار در اطراف جسم و توزیع تنش برشی از نقطه A تا F را رسم کنید.

۱۰-۱۰- با ترکیب جریان یکنواختی به سرعت $U = 10 \frac{m}{s}$ یک چشمه خطی به طول

$l_1 = 0.4m$ با قدرت $m_1 = \frac{1}{4\pi} (\frac{m^3}{s})$ و یک چاه خطی به طول $l_2 = 0.2m$ و با

قدرت $m_2 = \frac{2}{4\pi} (\frac{m^3}{s})$ جریان حول بدنه مدوری حاصل شده است. طول جسم

مدور را تعیین کنید و شعاع این جسم در $\theta = 60^\circ$ را محاسبه کنید.

تمرین های تکمیلی

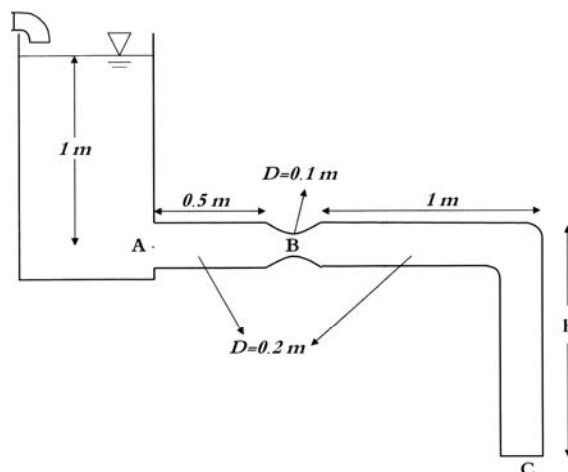
۱- در شکل زیر با فرض اینکه ارتفاع سطح آزاد آب در مخزن ثابت می ماند مطلوب است محاسبه فشار و سرعت جریان در نقاط A و B یکبار بدون در نظر گرفتن افتها و یکبار با در نظر گرفتن افتها ی مسیر در حالات زیر:

الف - $h = 0.5\text{ m}$ باشد.

ب - $h = 5\text{ m}$ باشد.

ضرایب افت موضعی را در مقطع A برابر $K_A = 0.5$ و در مقطع B برابر با $K_B = 0.22$ و در محل خم $K_{elbow} = 0.95$ در نظر بگیرید. ضریب افت طولی در جریان آرام $f = \frac{64}{\text{Re}}$ است. برای

$$\rho_{\text{water}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad v_{\text{water}} = 1.005 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$



شکل (۱): مربوط به تمرین تکمیلی ۱

۲- جریان آب از یک شیلنگ که متصل به لوله اصلی آب است در حال خارج شدن می باشد، اگر انتهای شیلنگ در سمت خروجی جریان را فشار دهیم به طوریکه آب از سطح مقطع کمتری خارج شود، توضیح دهید که سرعت فوران آب و دبی جریان چه تغییری می کنند و چرا؟ در مورد پاسخ خود با نوشتن روابط مناسب بحث کنید.

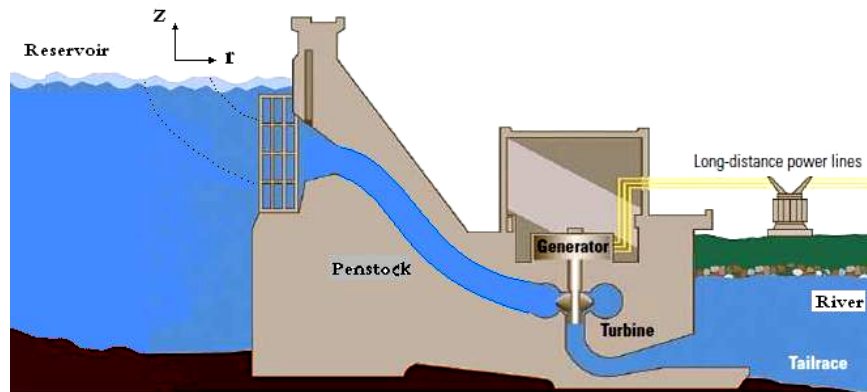
۳- استوانه ای به قطر 20 cm و کاملاً صاف در مقابل جریان آب با لزجت $v = 1.005 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ قرار دارد. طول استوانه را زیاد فرض می کنیم. اگر فشار در دور

دست فشار اتمسفر باشد، شکل جریان و نیروی دراگ را برای واحد طول استوانه در دو حالت زیر به دست آورید و در مورد جوابها بحث کنید. همچنین سرعت ماکزیمم و فشار می نیمم و محل آنها را به دست آورید.

الف- سرعت جریان $2\frac{m}{s}$ باشد.

ب- سرعت جریان $40\frac{m}{s}$ باشد.

۴- در جریان ورودی به سرریز نیلوفری^۱ یک سد، مطابق شکل زیر که می توان آنرا با ترکیب یک چاه و یک ورتکس آزاد مدل نمود، نشان دهید بعد از باز شدن دریچه، معادله سطح آزاد آب را در منطقه غالب می توان به صورت $z = -\frac{(Q^2 + k^2)}{8\pi^2 gr^2}$ تخمین زد که در آن Q قدرت چاه و $\frac{k}{2\pi}$ قدرت ورتکس می باشد.



شکل (۲): مربوط به تمرین تکمیلی ۴

۵- اگر مولفه سرعت در جهت X برابر با $u = x^2 + z^2 + 5$ و در جهت y برابر با $v = y^2 + z^2$ باشد معادله سرعت را برای مولفه در جهت z به دست آورید به قسمی که مقادیر فوق در معادله پیوستگی صادق باشند.

۶- مطلوب است محاسبه قدرت مورد نیاز یک دابلت بر حسب $\frac{m^2}{s}$ که بتواند جریان غیر

چرخشی سیالی با سرعت $4\frac{m}{s}$ را اطراف استوانه ای به قطر $1m$ (به صورت غیر چرخشی) شبیه سازی کند. اگر این سیال آب با دمای $20^\circ C$ باشد، در صورتیکه فشار جریان آزاد

$10kPa$ و دانسیته آب $\rho = 1000\frac{kg}{m^3}$ باشد

¹ Penstock

الف- فشار در نقطه سکون چقدر است؟

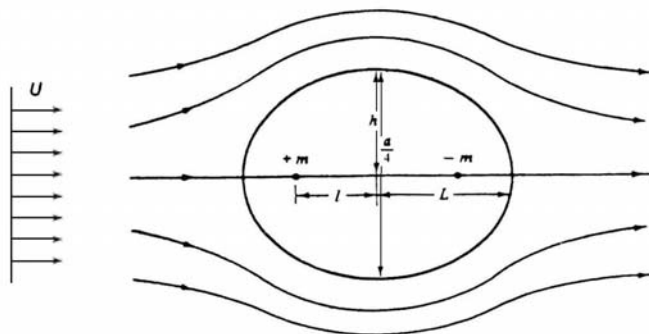
ب- سرعت تقریبی ماکزیمم روی استوانه چقدر است؟

ج- سرعت و فشار روی استوانه در $\theta = 135^\circ$ چقدر است؟

د- تفاوت جریان حقیقی با جریان غیر چرخشی را به طور خلاصه توضیح دهید.

ه- مقدار نیروی پسا را برای جریان حقیقی آب محاسبه کنید.

۷- یک بیضی رانکین در اثر وجود یک دو قطبی که عبارت از یک چشمه و یک چاه می باشد که در یک جریان یکنواخت موازی با محور X قرار دارد به وجود می آید. در یک چنین جریانی ضخامت ماکزیمم بیضی $\frac{a}{4}$ می باشد. سرعت جریان را بر حسب سرعت جریان یکنواخت موازی U در نقطه ای روی محور Y به فاصله $\frac{a}{4}$ از مبدا مختصات حساب کنید.



شکل (۳): مربوط به تمرین تکمیلی ۷

۸- جریان یکنواختی با سرعت U_0 از روی سیلندر به شعاع a عبور می کند اگر P_0 فشار جریان یکنواخت در فاصله دور قبل از سیلندر باشد. مقدار C_p در نقطه ای روی سیلندر که مقدار فشار باشد P را حساب کنید. C_p ضریب فشار نامیده می شود و طبق رابطه

$$\frac{P - P_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} \text{ تعریف می گردد.}$$

۹- ترکیب یک چشمه و یک چاه با قدرت m که به فاصله $\varepsilon \rightarrow 0$ از یکدیگر قرار گرفته اند، در صورتی که $m\varepsilon$ مقدار ثابتی باشد یک دابلت ایجاد می کند. موقعیت چشمه و چاه در صفحه به ترتیب $(-\frac{\varepsilon}{2}, 0)$ و $(+\frac{\varepsilon}{2}, 0)$ است. کدام یک از موارد زیر می تواند یک دابلت معادل با دابلت فوق را ایجاد کند؟ شرایط آن چیست؟

الف- ترکیب یک ورتکس و یک چشمه.

ب- ترکیب دو ورتکس.

ج- ترکیب دو چشمه و دو ورتکس.

۱۰- در ترکیب جریان اطراف استوانه با ورتکس، برای حالت جریان غیر چرخشی و جریان حقیقی بحث کنید که شکل جریان چگونه می شود و چگونه می توان نیروهای پسا و برآ را با توجه به توزیع فشاری که اتفاق می افتد به دست آورد؟ شکل جریان را برای حالتی که الف- دو نقطه سکون، ب- یک نقطه سکون، ج- هیچ نقطه سکون روی استوانه وجود دارد رسم کنید.

۱۱- نشان دهید اگر تابع جریان ψ_1 و ψ_2 در معادله لاپلاس صدق کند تابع $\psi = \psi_1 + \psi_2$ نیز

در معادله لاپلاس صادق است. آیا $\psi = 2\psi_1^2 + \psi_1\psi_2 + \frac{S}{\psi_2}$ می تواند حل لاپلاس باشد؟

خطوط جریان را بین دو جسم دو بعدی زیر و خارج آنها رسم کنید.



شکل (۴): مربوط به تمرین تکمیلی ۱۱

۱۲- نشان دهید اگر در مختصات استوانه ای بردار سرعت، به صورت $\vec{V} = v_r \hat{e}_r + v_\theta \hat{e}_\theta + v_z \hat{e}_z$

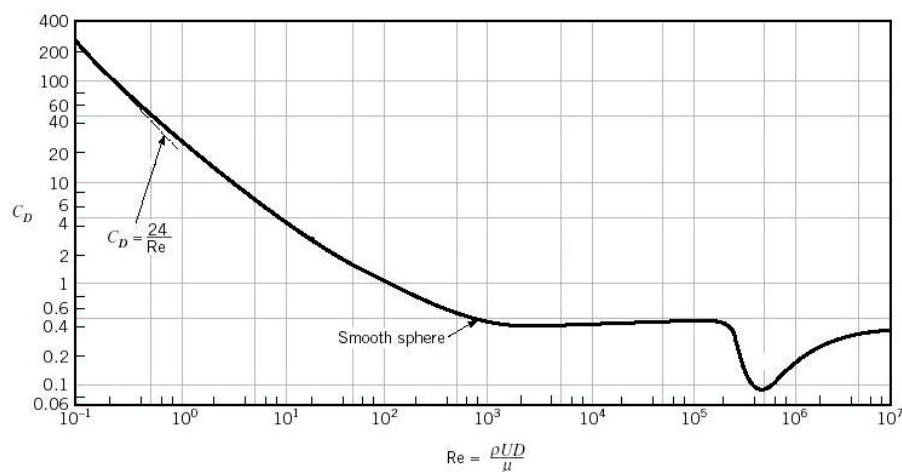
باشد، بردار ورتیسیتی به صورت زیر است:

$$\zeta = \left[\hat{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + \hat{e}_\theta \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \hat{e}_z \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right]$$

۱۳- از روابط ناویر- استوکس در مختصات استوانه ای شروع کنید و رابطه اوایلر در مختصات استوانه ای را به دست آورید.

۱۴- نمودار شکل زیر تغییرات ضریب دراگ در روی یک کره با سطوح صیقلی را بر حسب عدد

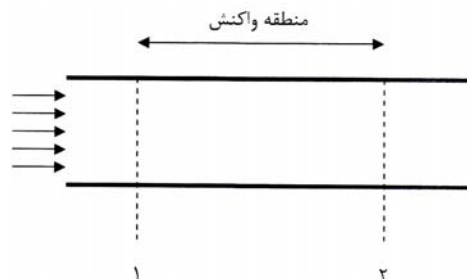
رینولدز نشان می دهد. دلیل تغییرات ضریب درگ بدین صورت را توضیح دهید.



شکل (۴): مربوط به تمرین تکمیلی ۱۴

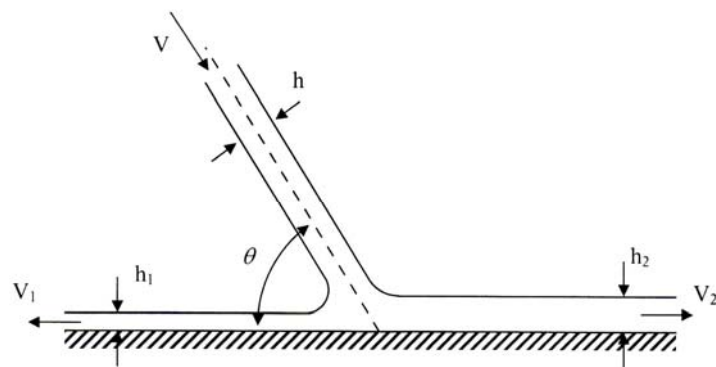
۱۵- شکل زیر یک راکتور با سطح مقطع ثابت را نشان می دهد. از سمت چپ، مخلوط همگن با چگالی ρ_1 و سرعت v_1 وارد می شود. در منطقه واکنش، مخلوط دچار تغییر شیمیایی شده و چگالی آن به ρ_2 می رسد. نسبت افت فشار کل به فشار دینامیکی ورودی، $\frac{P_{01} - P_{02}}{\frac{1}{2} \rho v_1^2}$

چقدر است؟



شکل (۵): مربوط به تمرین تکمیلی ۱۵

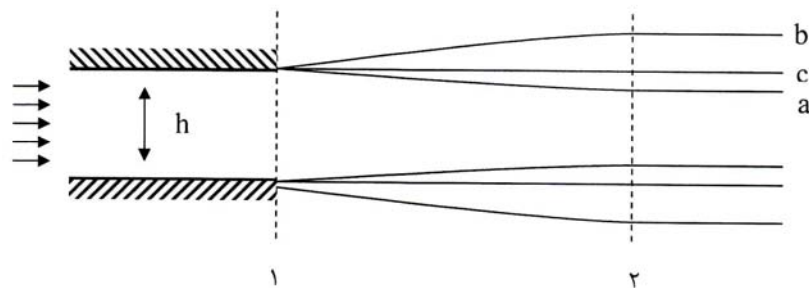
۱۶- یک جت آب با سرعت V و عرض h به طور مایل با زاویه θ نسبت به یک افق به یک صفحه تخت افقی برخورد می کند. جریان را می توان تراکم ناپذیر و غیر لزج فرض کرد. سرعت و ارتفاع هریک از جریانهای افقی را به دست آورید.



شکل (۶): مربوط به تمرین تکمیلی ۱۶

۱۷- یک جت آب مطابق شکل زیر از میان دو صفحه موازی خارج می شود. در غیاب نیروی جاذبه مسیر جریان مستقیم باقی می ماند. با دور شدن از لبه انتهایی به مقدار کافی عرض جریان ثابت خواهد بود.

- الف- آیا از اثر لزجت می توان صرف نظر کرد یا باید آنرا در نظر گرفت؟ چرا؟
- ب- با توجه به قسمت قبل، آیا استفاده از معادله برنولی بین ۱ و ۲ در این جریان مجاز است؟
- ج- آیا عرض جریان در این نقطه، کمتر (خطوط a)، بیشتر (خطوط b)، یا برابر (خطوط c) فاصله دو صفحه است؟ رابطه ای میان عرض جریان در این محل و فاصله صفحات به دست آورید. فرضیات خود را بنویسید.
- (راهنمایی: جریان در دهانه خروجی، توسعه یافته است و سرعت در این مقطع دارای پروفیل سهمی است).



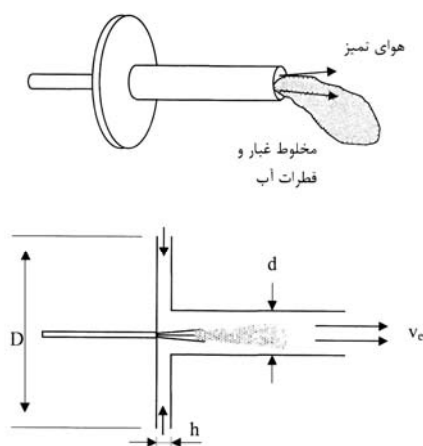
شکل (۷): مربوط به تمرین تکمیلی ۱۷

۱۸- یک تمیز کننده هوا مطابق شکل زیر کار می کند. یک جت آب بسیار سریع از نازل خارج شده و به درون لوله پاشیده می شود. این جت در ادامه لوله، شکسته شده و تبدیل به جریانی

از قطرات ریز می شود. هوای دارای گرد و غبار از اطراف، تحت تأثیر جت به داخل کشیده شده و در هنگام تغییر جهت، ذرات معلق آن جدا شده و توسط قطرات آب جذب می شوند. در انتهای لوله، قطرات آب جمع آوری شده و از هوای تمیز جدا می شوند. دبی هوای تمیز شده را بر حسب سرعت جت v_j ، دبی جت $\dot{m}_j$ ، فاصله صفحات h ، قطر لوله خروجی d و چگالی های آب و هوا به دست آورید.

راهنمایی: برای ساده تر شدن تحلیل، فرضیات زیر را استفاده کنید.

- $h \ll d \ll D$
- سرعت هوا و قطرات آب در خروجی با هم برابر است.
- $v_j \gg v_e$
- $\dot{m}_j v_j \gg \dot{m}_{air} v_e$



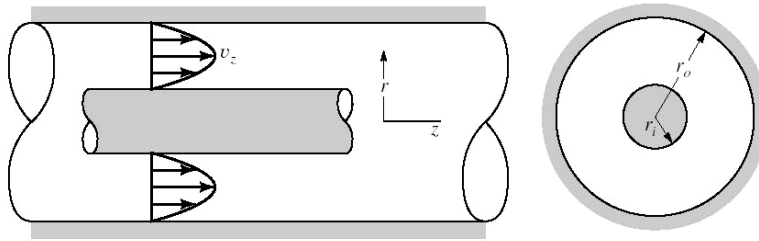
شکل (۸): مربوط به تمرین تکمیلی ۱۸

۱۹- مطابق شکل، جریانی یک جهته، پایدار و با تقارن محوری بین دو لوله مدور را در نظر بگیرید.

الف- معادلات حرکت را در این حالت نوشته و ساده کنید.

ب- شرایط مرزی را برای این جریان بنویسید.

ج- معادلات پروفیل سرعت و تنش برشی را به دست آورید.



شکل (۹): مربوط به تمرین تکمیلی ۱۹

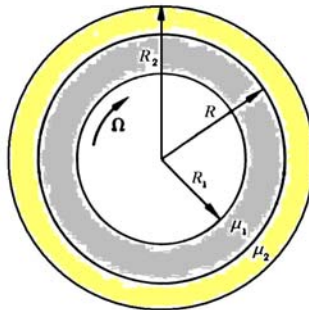
۲۰- یک میله با مقطع دایره به شعاع R_1 و طول بینهایت با سرعت زاویه ای Ω داخل یک سیلندر ثابت هم مرکز با میله که شعاع آن R_2 و $R_2 > R_1$ می باشد دوران می کند. فرض می شود جریان دو بعدی است. دو سیال غیر قابل تراکم با لزجت μ_1 و μ_2 (که سطح مشترک دو سیال R است) بین میله و سیلندر قرار دارد. با فرض اینکه جریان دو بعدی است و میله زمان زیادی است که می چرخد و جریان دائمی است،

الف- معادلات حرکت را در این حالت نوشته و ساده کنید.

ب- شرایط مرزی را برای این جریان بنویسید.

ج- در رابطه با تنش برشی روی سطح سیلندر در صورتی که $\mu_1 < \mu_2$ باشد و R از R_1 تا R_2 تغییر کند، بحث کنید.

د- قسمت (ج) را در حالتی که $\mu_2 \leq \mu_1$ باشد تکرار کنید.



شکل (۱۰): مربوط به تمرین تکمیلی ۲۰

۲۱- تابع تبدیل $w = z_1 + \frac{a^2}{z_1}$ ، جریان از چپ به راست موازی محور ϕ را از صفحه

$w = \phi + i\psi$ به جریان اطراف استوانه ای به شعاع a تبدیل می کند. با دو تابع تبدیل

$z_2 = z_1 e^{i\alpha}$ و $z = z_2 + \frac{b^2}{z_2}$ نهایتاً در صفحه z ، جریان غیر چرخشی با زاویه حمله α

اطراف استوانه با مقطع بیضی خواهیم داشت. در این جریان غیر چرخشی، مقدار

$\frac{dw}{dz} = u - iv$ را پیدا کنید و شکل جریان را در صفحات z, z_2, z_1 با چند خط جریان نشان دهید و در هر صفحه نقطه یا نقاط سکون را نیز مشخص کنید. با فرض اینکه سرعت در بینهایت $U_\infty = 1 \frac{m}{s}$ باشد، در صفحه z در نقطه $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $r = 2(a - \frac{b^2}{a})$ مقدار سرعت را به دست آورید. اگر P_∞ برابر فشار اتمسفر باشد، ضریب فشار $\frac{P - P_\infty}{1/2 \rho U_\infty^2}$ را در نقطه فوق و نقاط سکون محاسبه نمایید.

فهرست منابع و مراجع

1. Allen Jr Theodore, Ditsworth Richard L., "Fluid Mechanics", Mc Graw-Hill, Inc., London, 1972
2. Batchelor G. K., "An Introduction to Fluid Dynamics", Cambridge University press, 1970
3. Cengel Yunus A. Cimbala, John M. "Fluid Mechanics, Fundamentals and Applications", Mc Graw-Hill, Inc., 2006
4. Chow Ven Te, "Open Channel Hydraulics", Mc Graw-Hill, Inc., Newyork, 1959
5. Currie I. G. "Fundamental Mechanics of Fluids", Mc Graw-Hill, Inc., 2002
6. Daughery Robert L., Franzini Josseph B., "Fluid Mechanics with Engineering Applications", Mc Graw-Hill, Inc., U.K., 1977
7. Dixon Sydney Lawrence, "Fluid Mechanics, Thermodynamics of Turbomachinary", Macmillan, 1965
8. Douglas J. F., Gasiorec J. M., Swaffield J. A., "Fluid Mechanics", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985
9. Duncan W. J., Tom A. S., Young A. D. , "Mechanics of Fluids", Edward Arnold Ltd., London, 1960
10. Fox J. A. "An Introduction to Engineering Fluid Mechanics", Macmillan Press Ltd, London, 1974
11. Fox Robert W., McDonald Alan T., "Introduction to Fluid Mechanics", Fourth edition, John Wiley & Sons, Inc. 1994
12. Grimson J. "Advanced Fluid Dynamics and Heat Transfer", Mc Graw-Hill, Inc., 2008
13. Jafari G. I., Rad M., "Experimental Analysis of Cavitation Effects on Drag Force and Back Pressure of a Cylinder with Free Turbulence", In. J. of Sci. & Tech., Tran. B.M.E. 2009
14. John James E. A., Haberman William L., "Introduction to Fluid Mechanics", New Jersey, 1988

15. Khayyat M., Rad M. "Some Experimental Studies on the Performance of a Rigid Wing Land Yacht Model in Com. With VPP", Tran B.M.E. 2004
16. Kuethe A. M. , Chow C, Y., "Foundations of Aerodynamics, Bases of Aerodynamic Design", 5th Ed., John Wiley & Sons, Inc., 1998
17. Kundu Pijush K. , Kohen Ira M. , "Fluid Mechanics", 2nd Edition, Academic press, USA, 2002
18. Liggett James A. "Fluid Mechanics", Mc Graw-Hill Inc. New York, 2008
19. Munson Bruce R. , Young Donald F. , Okiishi Theodore H. , "Fundamentals of Fluid Mechanics", 4th edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002
20. Panton Ronald L., "Incompressible Flow", 3rd Ed., John Wiley & Sons, Inc, New York, 2005
21. Ramamrutham S., "Hydraulics, Fluid Mechanics and Fluid Machines", India, 1986
22. Russel George E., "Hydraulics", Cambridge, 1941
23. Sabersky Rolf H., Acosta Allen J., Hauptmann Edward G., Gates E. M., "Fluid Flow", 4th Ed., Prentice Hall, New Jersy, 1999
24. Schlichting Hermann, Klaus Gersten, "Boundary Layer Theory", 8th Revised Edition, Springer, Inc., Berlin, 2000
25. Shames Irving H. , "Mechanics of Fluids", Third edition, Mc Graw-Hill, Inc., 1992
26. Streeter Victor L., Wylie Benjamin E., Bedford, Keith W., "Fluid Mechanics", 9th Edition, Mc Graw-Hill, Boston, 1998
27. Vallentine H. R. , "Applied Hydrodynamics", First published by Butterworth & Co. 2008
28. Vennard J. K. , "Elementary Fluid Mechanics", John Wiley & Sons, Inc., 1961
29. White Frank. M. , "Fluid Mechanics", 4th edition, Mc Graw-Hill, Inc., 2004
30. White Frank. M. , "Viscous Fluid Flow", 3rd edition, Mc Graw-Hill, 1994